Самарский государственный университет

Кожевников Е.Н.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЕКТОРНОМУ АНАЛИЗУ

Самара
2000

Министерство общего и профессионального
образования Российской федерации
Самарский государственный университет
Кафедра механики сплошной среды

Кожевников Е.Н.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЕКТОРНОМУ АНАЛИЗУ

Издательство "Самарский университет"
2000

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

Предлагаемый сборник содержит задачи по всем разделам курса векторного анализа, начиная с векторной функции скалярного аргумента и заканчивая дифференциальными операциями в криволинейных координатах. В сборник включены задачи, встречающиеся при работе с полями в электродинамике и механике сплошных сред, а также большое количество оригинальных задач на применение оператора Гамильтона, дифференцирование полей второго порядка, операции векторного анализа в криволинейных координатах. В начале каждого параграфа приводятся основные теоретические сведения и решения наиболее типичных задач.

Рекомендуется студентам физических, и механико-математических специальностей университета, а также студентам инженерно-физических специальностей технических вузов.

Составитель: д-р физ.-мат. наук, проф. Е.Н. Кожевников

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В.П. Радченко
д-р техн. наук, проф. Ю.Э. Сеницкий

Содержание

1 Вектор. Векторная функция скалярного аргумента. Годограф.

Вектором $\vec{A}$ *размерности* n называется упорядоченный набор величин $(A_1, A_2, ..., A_n)$ – компонент вектора, для которого определены операции умножения на число, сложения и скалярное произведение; последние две операции определены для векторов одинаковой размерности.

В трехмерном пространстве вектор можно представить линейной комбинацией трех некомпланарных векторов (разложением по базису), либо, при заданном базисе, – перечислением его компонент. В декартовом базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ($\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k} \perp \vec{i}$; $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$) записи $\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$ и $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ определяют один и тот же вектор $\vec{A}$. Геометрической интерпретацией вектора служит направленный отрезок.

Операции умножения вектора на число и сложения векторов переносятся на их компоненты. Если два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ заданы в трехмерном пространстве декартовыми компонентами $\vec{A} =$
$= (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ и α, β - числа, то линейная комбинация $\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ представляет собой вектор

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = (\alpha A_x + \beta B_x,\, \alpha A_y + \beta B_y,\, \alpha A_z + \beta B_z)\,. \tag{1.1}$$

Скалярное произведение в декартовых координатах определяется как сумма произведений одноименных компонент сомножителей

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{1.2}$$

Длиной вектора $\vec{A}$ называется величина

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{1.3}$$

Скалярное произведение векторов выражается через их длины и косинус угла α между ними

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\alpha. \tag{1.4}$$

Из формул (1.2),(1.4) вытекает следующее выражение для косинуса угла между векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}. \tag{1.5}$$

В трехмерном пространстве определено *векторное произведение векторов* $\vec{A}\times\vec{B}$; в декартовых координатах компоненты векторного произведения получают, раскрывая определитель

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

Три вектора $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ могут образовывать смешанное произведение

$$\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C}),$$

которое не меняется при циклической перестановке векторов и меняет знак при перестановке местами любых двух векторов

$$\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}(\vec{A}\times\vec{B}) = -\vec{B}(\vec{A}\times\vec{C}), \tag{1.7}$$

а также двойное векторное произведение

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}),$$

которое раскрывается через скалярные произведения по формуле

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B}). \tag{1.8}$$

Если компоненты вектора $\vec{A}$ являются функциями скалярного аргумента t и имеют одну и ту же область определения, то вектор $\vec{A} = \vec{A}(t) = (A_x(t), A_y(t), A_z(t))$ называется *векторной функцией скалярного аргумента* t. Если начало вектора $\vec{A}(t)$ поместить в постоянную точку O, то конец вектора $\vec{A}(t)$ при изменении параметра t опишет пространственную кривую, которую называют *годографом* векторной функции $\vec{A}(t)$.

Производная векторной функции $\vec{A}(t)$ по скалярному аргументу t определяется дифференцированием ее компонент

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{A}(t)}{dt} &= \left(\frac{dA_x(t)}{dt}, \frac{dA_y(t)}{dt}, \frac{dA_z(t)}{dt}\right) = \\
&= \vec{i}\,\frac{dA_x(t)}{dt} + \vec{j}\,\frac{dA_y(t)}{dt} + \vec{k}\,\frac{dA_z(t)}{dt}.
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Вектор $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ направлен по касательной к годографу вектора $\vec{A}(t)$. Единичный вектор $\vec{\tau}$

$$
\vec{\tau} = \frac{d\vec{A}}{dt} \Bigg/ \left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right| \tag{1.10}
$$

называется *единичным вектором касательной*; вектор $\vec{\tau}$ задает направление годографа в точке $\vec{A}(t)$. *Угол между кривыми* $\vec{A}_1(t)$ и $\vec{A}_2(t)$ в точках пересечения определяется как угол α между единичными векторами касательных : $\cos\alpha = \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$.

Пусть кривая задана параметрически в виде

$$
\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}
$$

где t - параметр.

Уравнение касательной прямой к кривой в точке $\vec{r}_0$: $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$ определяется параметрически уравнениями

$$
\vec{R} = \vec{r}_0 + s\,\big(d\vec{r}/dt\big)_0 \ : \quad \begin{cases} X = X(s) = x_0 + s\,\big(dx/dt\big)_0 \\ Y = Y(s) = y_0 + s\,\big(dy/dt\big)_0 \\ Z = Z(s) = x_0 + s\,\big(dz/dt\big)_0, \end{cases} \tag{1.11}
$$

где $s \in (-\infty, \infty)$ – переменный параметр, $X = X(s), Y = Y(s), Z = Z(s)$ – координаты точек касательной прямой.

Уравнение нормальной плоскости к кривой $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ определяется уравнением

$$
\begin{aligned}
&(\vec{R} - \vec{r}_0) \cdot \big(d\vec{r}/dt\big)_0 = \\
&= \big(dx/dt\big)_0\, X + \big(dy/dt\big)_0\, Y + \big(dz/dt\big)_0\, Z - \\
&- \big[\big(dx/dt\big)_0\, x_0 + \big(dy/dt\big)_0\, y_0) + \big(dz/dt\big)_0\, z_0\big] = 0,
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

где $\vec{R} = (X, Y, Z)$ - координаты точек плоскости

Неопределенный интеграл от векторной функции $\vec{A}(t)$ находится интегрированием ее компонент

$$\begin{gathered}\vec{R}(t) = \int \vec{A}(t)dt + \vec{C} = \\ \left(\int A_x(t)dt + C_x, \int A_y(t)dt + C_y, \int A_z(t)dt + C_z\right) = \\ = \vec{i}\left(\int A_x(t)dt + C_x\right) + \vec{j}\left(\int A_y(t)dt + C_y\right) + \\ +\vec{k}\left(\int A_z(t)dt + C_z\right)\end{gathered} \tag{1.13}$$

и определен с точностью до постоянного вектора $\vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$.

Упражнение 1.1. Найти направление кривой $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ в точке, соответствующей значению $t = 0$.

Решение. Направление кривой определяется единичным вектором касательной $\vec{\tau}$ по формуле (1.10). Дифференцируя компоненты вектора $\vec{r}(t)$ по t, найдем производную $d\vec{r}(t)\big/dt = (\cos t - t\sin t,$
$\sin t + t\cos t, 1)$; в точке $t = 0$ получим $d\vec{r}(t)\big/dt = (1, 0, 1)$. Деля производную $d\vec{r}(t)\big/dt$ на ее длину $\left|d\vec{r}(t)\big/dt\right| = \sqrt{2}$, найдем вектор $\vec{\tau}$

$$\vec{\tau}\Big|_{t=0} = \left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right).$$

Упражнение 1.2. Определить угол между плоскими кривыми $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = x^2$ в точках пересечения.

Решение. Приведем кривые к параметрическому виду, выбирая в качестве параметра координату x

$$\vec{r}_1 = \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t}, \end{cases} \qquad \vec{r}_2 = \begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases}$$

и определим единичные вектора касательных

$$\begin{gathered}\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{r}_1}{dt}\right| = \left(\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1+4t}}, \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\right), \\ \vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right| = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t}}\right).\end{gathered}$$

Приравнивая координаты y_1 и y_2 : $\sqrt{t} = t^2$, найдем значения t, которые определяют точки пересечения кривых: $t_1 = 0 \Longrightarrow O_1(0,0)$; $\quad t_2 = 1 \Longrightarrow O_2(1,1)$. Определяя единичные вектора касательных в точках пересечения $O_1\{\vec{\tau}_1 = (0,1), \vec{\tau}_2 = (1,0)\}$ и $O_2\{\vec{\tau}_1 = \left(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\right), \vec{\tau}_2 = \left(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}\right)\}$, найдем по формуле (1.5) угол между кривыми. В точке O_1 получим

$$\cos\alpha\Big|_{O_1} = \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2\Big|_{O_1} = 0 \Longrightarrow \alpha = \pi/2.$$

В точке O_2 –

$$\cos\alpha\Big|_{O_2} = \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2\Big|_{O_2} = 4/\sqrt{5} \Longrightarrow \alpha = \arccos(4/\sqrt{5}).$$

Упражнение 1.3. Задана кривая $\vec{r}(t)$: $x(t) = \alpha t^2 + \beta a$, $y(t) = t$, $z(t) = \beta t^2 - \alpha c$, где t - параметр, c, α, β - постоянные, причем имеет место соотношение $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Написать уравнение касательной прямой в точке $(x(t), y(t), z(t))$. Какая линия получается в пересечении касательных с плоскостью xy?

Решение. Дифференцируя векторную функцию $\vec{r}(t)$ по параметру t

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (2\alpha t, 1, 2\beta t),$$

построим по формуле (1.11) уравнение касательной прямой $\vec{R} = \vec{R}(s)$ в произвольной точке $\vec{r}(t)$

$$\vec{R}(s) = \vec{r}(t) + \frac{d\vec{r}(t)}{dt}s = \begin{cases} X(s) = \alpha t^2 + \beta c + 2\alpha t s, \\ Y(s) = t + s, \\ Z(s) = \beta s^2 - \alpha c + 2\beta t s. \end{cases}$$

Плоскости xy соответствует нулевое значение координаты Z. Приравнивая $Z(s) = \beta t^2 - \alpha c + 2\beta t s = 0$, найдем значения параметра s, определяющие точку пересечения касательных прямых с плоскостью:

$$s = \frac{\alpha c - \beta t^2}{2\beta t}.$$

Подставляя это выражение для s в компоненты $X(s), Y(s)$, найдем геометрическое место точек пересечения касательных с плоскостью xy для различных значений t

$$X(t) = \frac{c}{\beta}, \quad Y(t) = \frac{\alpha c + \beta t^2}{2\beta t},$$

откуда следует, что линией пересечения касательных с плоскостью xy будет прямая $X = c/\beta$.

Упражнение 1.4. Составить уравнение нормальной плоскости к кривой $\vec{r}(t)$: $x(t) = \alpha t^3 + a$, $y(t) = \beta t^2 + b$, $z(t) = \gamma t + c$, где t - параметр, $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ – постоянные, в точке $(x(t), y(t), z(t))$.

Решение. Определяя производную функции $\vec{r}(t)$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (3\alpha t^2, 2\beta t, \gamma),$$

построим по формуле (1.12) уравнение нормальной плоскости

$$\left(\vec{R} - \vec{r}(t)\right) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} =$$
$$= (X - \alpha t^3 - a)3\alpha t^2 + (Y - \beta t^2 - b)2\beta t + (Z - \gamma t - c) = 0.$$

Это уравнение приводится к каноническому виду

$$(3\alpha t^2)\, X + (2\beta t)\, Y + \gamma\, Z - H = 0,$$

где H равно

$$H = 3\alpha t^2(\alpha t^3 + a) + 2\beta t(\beta t^2 + b) + (\gamma t + c) = 0.$$

Задачи

1.1 Построить годографы векторов:

$$a)\, \vec{r} = \vec{i}\, 2 + \vec{j}\, t^2 - \vec{k}\, t^2;$$
$$b)\, \vec{r} = \vec{i}\, t + \vec{j}\, t + \vec{k}\, t^2;$$
$$c)\, \vec{r} = \vec{i}\, a\, \cos t + \vec{j}\, b\, \sin t;$$
$$d)\, \vec{r} = \vec{i}\, \sin^2 t + \vec{j}\, \cos^2 t;$$
$$e)\, \vec{r} = \vec{i}\, a\, \cos t + \vec{j}\, a\, \sin t + \vec{k}\, ct;$$
$$f)\, \vec{r} = \vec{i}\, \frac{t^2 + 1}{(t+1)^2} + \vec{j}\, \frac{2t}{(t+1)^2};$$

$g)\, \vec r = \vec i\, a\, \cos t(1+\cos t) + \vec j\, a\, \sin t(1+\cos t);$

$h)\, \vec r = \vec i\, a\, \cos^3 t + \vec j\, a\, \sin^3 t;$

$i)\, \vec r = \vec i\, \dfrac{3at}{t^3+1} + \vec j\, \dfrac{3at^2}{t^3+1};$

$j)\, \vec r = \dfrac{\vec i\, 2t + \vec j\, 2t + \vec k\, (t^2-2)}{t^2+1};$

$k)\, \vec r = \vec i\, t + \vec j\, \dfrac{1}{3}\, t^2 + \vec k \dfrac{1}{9}\, t^3;$

$l)\, \vec r = \vec i\, (t^2 - t + 1) + \vec j\, (t^2 + t + 1).$

1.2 Доказать, что, если векторы $\vec r_1$ и $\vec r_2$ не коллинеарны, годографом векторной функции

$$\vec r = \vec r_1\, \cos\, t + \vec r_2\, \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

будет эллипс. Каким будет годограф в случае коллинеарности векторов $\vec r_1$ и $\vec r_2$?

1.3 Доказать, что, если векторы $\vec r_1$ и $\vec r_2$ не коллинеарны, годографом векторной функции

$$\vec r = \vec r_1\, \mathrm{ch}\, t + \vec r_2\, \mathrm{sh} t, \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

будет гипербола. Каким будет годограф в случае коллинеарности векторов $\vec r_1$ и $\vec r_2$?

1.4 Найти производную $\dfrac{d\vec r}{dt}$, если

$a)\, \vec r(t) = \vec i\, a\, \cos t + \vec j\, b\, \sin t;$

$b)\, \vec r(t) = \vec i\, a\, \sin t + \vec j\, a\, \cos t + \vec k\, b\, t^2;$

$c)\, \vec r(t) = \vec a\, e^{\omega t} + \vec b\, e^{-\omega t},$

$\vec a$, $\vec b$ - постоянные векторы.

1.5 Пусть

$$\vec v = \vec i\, v_1(x, y, z, t) + \vec j\, v_2(x, y, z, t) + \vec k\, v_3(x, y, z, t),$$

где v_i - непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, x,y,z - непрерывно дифференцируемые функции от t. Показать, что

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

1.6 Найти производные

$$a)\, \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right), \quad b)\, \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right),$$

$$c)\, \frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{r}\right), \;\; d)\, \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right),$$

где $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{a}$ - постоянный вектор.

1.7 Доказать, что

$$a) \quad \frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) +$$

$$+ \quad \vec{A}\cdot\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\times\vec{C}\right) + \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{dt}\right);$$

$$b) \quad \frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\right)\right) = \vec{A}\cdot\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\times\frac{d^3\vec{A}}{dt^3}\right);$$

$$c) \quad \int \vec{A}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}dt = \vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{C};$$

$$d) \quad \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{C}, \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}f(r).$$

1.8 Составьте уравнения касательных к следующих кривым в указанных точках:

$$a)\, x \;=\; 1/\cos t, \quad y = \operatorname{tg} t, \quad z = t \qquad\quad t = \pi/4;$$

$$b)\, x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t^2 \qquad t = 1;$$
$$c)\, x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t \qquad t = 0.$$

1.9 Составьте уравнения касательной к кривой

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a \sin (t/2) \qquad t = \pi/2.$$

Какой угол образует эта касательная с осью z?

1.10 В каких точках касательная к кривой $x = \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t + 3$ параллельна оси z?

1.11 Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости винтовой линии $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 4t$ в точке, соответствующей значению $t = 0$.

1.12 Задана кривая $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Напишите уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке, соответствующей значению $t = 1$. Какая линия получается в пересечении касательных с плоскостью xy?

1.13 Доказать, что линия $x = e^{t/\sqrt{2}} \cos t$, $y = e^{t/\sqrt{2}} \sin t$, $z = e^{t/\sqrt{2}}$ лежит на конусе $x^2 + y^2 = z^2$ и пересекает его образующие под углом $45°$.

1.14 Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости линии $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ $(ab \geq 0)$ в произвольной точке.

1.15 Найти точки пересечения и углы, под которыми пересекаются следующие линии

$$a) \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 - 6x = 9;$$
$$b) \quad y = \sin x, \quad y = \cos x.$$

1.16 Доказать, что следующие линии пересекаются под прямым углом

$$a) \quad y = x - x^2, \quad y = x^2 - x,$$
$$b) \quad x^2 - y^2 = a, \quad xy = b.$$

1.17 Найти интегралы от следующих векторных функций:

$$a)\, \vec{r}(t) = \vec{i} \cos t + \vec{j}\, e^{-t} + \vec{k},$$

$b)\,\vec{r}(t) = \vec{i}\,t\,\sin t + \vec{j} + \vec{k}\,te^t,$

$c)\,\vec{r}(t) = \vec{i}\,\cos t - \vec{j}\,\sin^2 t,$

$c)\,\vec{r}(t) = \vec{i}\,t\,e^t - \vec{j}\,\ln\,t/t + \vec{k}\ln\,t.$

2 Скалярное поле. Поверхности уровня.

Если каждой точке пространства или его части однозначно сопоставлена некоторая величина , то говорят, что задано поле этой величины. Поле называется *скалярным*, если рассматриваемая величина скалярная. Геометрической характеристикой скалярного поля $\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z,)$ являются *поверхности уровня*, на которых поле φ принимает постоянное значение $c\colon \varphi(x, y, z) = c$. В двухмерном случае постоянному значению поля соответствует *кривая уровня.*

Если функция φ описывает потенциальное поле, поверхности уровня называют *эквипотенциальными поверхностями.*

Упражнение 2.1. Определить линии уровня двумерного поля

$$\varphi = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2}.$$

Решение. Фиксируем значение поля

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = c - \; const$$

и выделим более простое соотношение между координатами x и y. Для этого перенесем один из корней в правую часть равенства

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \; - \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

и возведем обе части полученного равенства в квадрат. После преобразований получим

$$4y - c^2 = 2c\sqrt{x^2 + (y+1)^2}.$$

Снова возводим обе части равенства в квадрат. Преобразуя, находим уравнение линии уровня

$$x^2 + \frac{c^2-4}{c^2}\,y^2 = \frac{c^2-4}{4}.$$

Из условия задачи следует оценка для значения поля $c \geq 2$. Поэтому в уравнении для линии уровня коэффициент при y^2 и правая часть положительны и линии уровня представляют собой эллипсы с полуосями $Ox = \sqrt{c^2-4}/2$ и $Oy = c/2$.

Упражнение 2.2. Определить поверхности уровня поля

$$\varphi = \sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2},$$

где постоянные $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Решение. Фиксируем значение поля

$$\sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2} = c - \ const$$

и возводим обе части равенства в квадрат

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = c^2.$$

Поверхности уровня при положительнных значениях α, β, γ представляют эллипсы с полуосями $c/\sqrt{\alpha}, c/\sqrt{\beta}, c/\sqrt{\gamma}$.

Задачи

2.1 Найти линии уровня скалярных полей на плоскости (x, y):

$a)\, u = 2x - y;$ $\qquad b)\, u = x^2 - y^2;$

$c)\, u = \ln\sqrt{\dfrac{y}{2x}};$ $\qquad d)\, u = \dfrac{2x - y + 1}{x^2},$

$e)\, u = \sqrt{y^2 - x} + \sqrt{y^2 + x}.$

2.2 Найти поверхности уровня:

$a)\, \varphi = x + 2y + 3z;$ $\qquad b)\, \varphi = e^{\vec{a}\cdot\vec{r}};$

$c)\, \varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$ $\qquad d)\, \varphi = \ln|\vec{r}|;$

$e)\, \varphi = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

2.3 Найти поверхность уровня скалярного поля

$$\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2},$$

проходящую через точку $(9, 12, 28)$.

2.4 Каковы поверхности уровня скалярного поля, определяемого потенциалом Юкавы $\varphi = e^{-\alpha r}\big/r$, где $r = |\vec{r}|, \alpha - const$?

2.5 Найти поверхность уровня скалярного поля

$$\varphi = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

проходящую через точку $(1, 1, 1)$.

3 Градиент и производная по направлению скалярного поля.

Если $\varphi = \varphi(x, y, z)$, где $\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z$ - радиус-вектор, есть дифференцируемое скалярное поле, то *градиентом* поля называется вектор

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}.\right) \tag{3.1}$$

Вектор $\operatorname{grad}\varphi$ для каждой точки поля дает величину $|\operatorname{grad}\varphi|$ и направление $\vec{n}$ наибольшей пространственной скорости изменения функции φ:

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad}\varphi}{|\operatorname{grad}\varphi|}. \tag{3.2}$$

Скорость изменение поля φ в направлении, задаваемом единичным вектором $\vec{l}$, называется *производной по направлению* и определяется скалярным произведением

$$\frac{d\varphi}{dl} = \vec{l} \cdot \operatorname{grad}\varphi. \tag{3.3}$$

Точка, в которой градиент скалярного поля равен нулю, называется *стационарной точкой* этого поля.

Градиент поля φ в каждой точке пространства направлен по нормали к поверхности уровня. *Единичный вектор нормали* $\vec{n}$ к поверхности уровня $\varphi = \varphi(x, y, z)$ в нестационарной точке определяется формулой (3.2).

Угол между поверхностями $\varphi_1(x, y, z) = const$ и $\varphi_2(x, y, z) = const$ определяется как угол α между нормалями $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ к поверхностям в точке их пересечения

$$\cos\alpha = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{\mathrm{grad}\varphi_1 \cdot \mathrm{grad}\varphi_2}{|\mathrm{grad}\varphi_1||\mathrm{grad}\varphi_2|}. \tag{3.4}$$

Упражнение 3.1. Определить величину и направление изменения поля $\varphi = z\big/\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M(1, -1, 1)$.

Решение. Вычислим градиент поля в произвольной точке

$$\mathrm{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(-\frac{xz}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, -\frac{yz}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\right).$$

В точке $M(1, -1, 1)$ градиент равен

$$\mathrm{grad}\varphi = \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Величина изменения поля определяется модулем градиента и в указанной точке равна

$$|\mathrm{grad}\varphi| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Направление изменения поля определяется единичным вектором $\vec{n} = \mathrm{grad}\varphi\big/|\mathrm{grad}$
для указанной точки получим

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{grad}\varphi}{|\mathrm{grad}\varphi|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Упражнение 3.2. Найти производную поля $\varphi = x^3 - y + z^3$ в точке $M(2, -1, 2)$ в направлении градиента этого поля в той же точке.

Решение. Направление градиента определяется единичным вектором $\vec{n} = \text{grad}\varphi \big/ |\text{grad}\varphi|$. Вычисляя градиент поля для указанной точки $\text{grad}\varphi\big|_M = (12, 1, 12)$ и определяя его модуль $\big|\text{grad}\varphi\big| = 17$, найдем вектор $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \left(\frac{12}{17}, \frac{1}{17}, \frac{12}{17}\right).$$

Производная поля по направлению градиента определяется формулой

$$\frac{d\varphi}{dn} = \vec{n} \cdot \text{grad}\varphi = 17.$$

Упражнение 3.3. Найти стационарные точки поля $\varphi = x^2 + y^3 + z^4 - 1$.

Решение. В стационарных точках поля градиент обращается в ноль. Определяя градиент указанного поля $\text{grad}\varphi = (2x, 3y^2, 4z^3)$ и приравнивая его компоненты нулю, найдем единственную стационарную точку $O(0, 0, 0)$.

Упражнение 3.4. Определить угол между градиентами поля $\varphi = x\big/yz$ в точках $O_1(1, 1, 1)$ и $O_2(1, -1, -1)$.

Решение. Вычислим градиент поля для произвольной точки

$$\text{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{yz}, -\frac{x}{y^2 z}, -\frac{x}{yz^2},\right).$$

В точках $O_1(1, 1, 1)$ и $O_2(1, -1, -1)$ градиенты определяются векторами

$$\text{grad}\varphi\big|_{O_1} = (1, -1, -1), \qquad \text{grad}\varphi\big|_{O_2} = (1, 1, 1).$$

Скалярное произведение градиентов определяет косинус угла α между этими векторами

$$\cos\alpha = \frac{\text{grad}\varphi\big|_{O_1} \cdot \text{grad}\varphi\big|_{O_2}}{\Big|\text{grad}\varphi\big|_{O_1}\Big| \, \Big|\text{grad}\varphi\big|_{O_2}\Big|} = \frac{-1}{3}.$$

Упражнение 3.5. Вычислить единичный вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности $\varphi = x^3 + y + z^3 - 17 = 0$ в точке $M(2, -1, 2)$.

Решение. Определяя градиент поля в указанной точке

$$\text{grad}\varphi = \left(3x^2, 1, 3z^2\right)\big|_M = (12, -1, 12)$$

и деля его на модуль градиента, найденный в той же точке, $|\mathrm{grad}\varphi| = = 17$, получим

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{grad}\varphi}{|\mathrm{grad}\varphi|} = \left(\frac{12}{17}, \frac{1}{17}, \frac{12}{17}\right).$$

Задачи

3.1 Найти градиенты скалярных полей

$$a)\, \varphi = x - 2y + 3z,$$
$$b)\, \varphi = xy + yz + xz,$$
$$c)\, \varphi = xe^{x^2+y^2+z^2},$$
$$d)\, \varphi = \mathrm{arctg}\frac{x}{y},$$
$$e)\, \varphi = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$f)\, \varphi = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy,$$
$$g)\, \varphi = xyz\, e^{x+y+z},$$
$$h)\, \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz}.$$

3.2 Найти величину и направление градиента поля $\varphi = x^2 + + 2y^2 + 5z^2 + xy + 2x - 7z$ в точках: а) A(0,0,0); б) B(1,2,1); в) C(2,0,1). В какой точке поля градиент равен нулю?

3.3 Пусть $\varphi = xy - z^2$. Найти величину и направление $\mathrm{grad}\,\varphi$ в точке O(-9,12,10). Чему равна производная $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$ в направлении биссектрисы координатного угла xy.

3.4 В каких точках пространства градиент поля

$$\varphi = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

а) перпендикулярен к оси z; b) параллелен оси z; c) равен нулю?

3.5 Дано скалярное поле

$$\varphi = \ln\frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. В каких точках пространства имеет место равенство $|\operatorname{grad}\varphi| = 1$?

3.6 Найти точки, в которых модуль градиента скалярного поля $\varphi = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ равен единице.

3.7 Найти угол α между градиентами скалярного поля $\varphi = \ln(y/x)$ в точках $A(1/2, 1/4)$ и $B(1, 1)$.

3.8 Найти угол β между градиентами поля

$$\varphi = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

в точках A(1,2,2) и B(-3,1,0).

3.9 Найти угол β между градиентами полей $\varphi = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $\psi = \ln(x^2+y^2+z^2)$ в точке O(0,0,1).

3.10 Найти угол α между градиентами полей $\varphi = x^2+y^2-z^2$ и $\psi = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$ в точке $O(1, 1, \sqrt{7})$.

3.11 Найти точки, в которых градиент скалярного поля $\varphi = \sin(x+y)$ равен $\vec{i} + \vec{j}$.

3.12 Найти градиенты следующих скалярных полей

$$a)\,\varphi = r; \qquad b)\,\varphi = \ln r; \qquad c)\,\varphi = \frac{e}{r};$$
$$d)\,\varphi = \vec{a}\cdot\vec{r}; \qquad e)\,\varphi = \vec{r}\cdot\vec{r}; \qquad f)\,\varphi = |\vec{a}\times\vec{r}|^2,$$

где

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ - постоянные векторы, e - константа.

3.13 Показать, что $\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$.

3.14 Найти $\operatorname{grad}\varphi(r)\cdot\vec{r}$.

3.15 Найти $\operatorname{grad}\varphi(r)\times\vec{r}$.

3.16 Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля $\varphi = x^2+y^2+z^2$.

3.17 Написать уравнения нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

$$
\begin{aligned}
&a) z = x^3 + y^3 \qquad\qquad M(1,2,9);\\
&b) x^2 + y^2 + z^2 = 169 \qquad\qquad M(3,4,12);\\
&c) x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0 \qquad\qquad M(3,1,-1).
\end{aligned}
$$

3.18 Найти угол пересечения поверхностей $x^2+y^2+z^2 = c_1$ и $x+y+z = c_2$.

3.19 Найти производную функции $\varphi = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ в произвольной точке $(,,z)$ в направлении радиуса - вектора $\vec{r}$ этой точки.

3.20 Найти производную функции $\varphi = \dfrac{1}{r}$ в направлении вектора $\vec{l} = \vec{i}\,\cos\alpha + \vec{j}\,\cos\beta + \vec{k}\,\cos\gamma$. При каком условии эта производная равна нулю?

3.21 Найти производную функции $\varphi = \dfrac{1}{r}$ в направлении ее градиента.

3.22 Найти производную функции $\varphi = yze^x$ в точке M(0,0,1) по направлению ее градиента.

3.23 Найти производную скалярного поля $\varphi = \varphi(x,y,z)$ по направлению градиента скалярного поля $\psi = \psi(x,y,z)$. При каком условии она равна нулю?

3.24 Для следующих скалярных полей найти направление и величину наибольшего изменения в данных точках:

$$
\begin{aligned}
&a)\,\varphi = x^2y + y^2z + z^2x, \qquad A(1,0,0);\\
&b)\,\varphi = xyz, \qquad A(2,1,-1);\\
&c)\,\varphi = x^y, \qquad A(1,1,1).
\end{aligned}
$$

3.25 Найти стационарные точки скалярных полей:

$$
\begin{aligned}
&a)\,\varphi = x^3 + y^3 - 3xy,\\
&b)\,\varphi = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x.
\end{aligned}
$$

4 Векторное поле. Векторные линии.

Если каждой точке пространства или его части однозначно сопоставлен некоторый вектор $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z)$, то говорят, что задано поле этого вектора или *векторное поле*.

Геометрической характеристикой векторного поля служат векторные линии. *Векторными линиями* поля $\vec{A}(\vec{r})$ называются кривые, в каждой точке которых касательная имеет направление вектора $\vec{A}$ в этой точке. Если задано векторное поле $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$, то элемент векторной линии $d\vec{r}$, направленный по касательной к ней, коллинеарен с вектором $\vec{A}$ в данной точке, то есть $d\vec{r} = \vec{A}\,dt$, где dt коэффициент пропорциональности – дифференциал параметра t. Дифференциальные уравнения векторных линий принимают вид

$$\frac{dx}{A_x(x,y,z)} = \frac{dy}{A_y(x,y,z)} = \frac{dz}{A_z(x,y,z)} = dt. \tag{4.1}$$

Проинтегрировав систему уравнений (4.1), найдем заданное параметрически семейство векторных линий поля $\vec{A}$: $x = x(t, {}_1, {}_2, {}_3)$, $y = y(t, {}_1, {}_2, {}_3)$, $z = z(t, {}_1, {}_2, {}_3)$. Постоянные интегрирования ${}_1, {}_2, {}_3$ определяют точку пространства $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит векторная линия при значении параметра $t = t_0:$ $x_0 = x(t_0, {}_1, {}_2, {}_3), y_0 = y(t_0, {}_1, {}_2, {}_3)$, $z_0 = z(t_0, {}_1, {}_2, {}_3)$.

Альтернативная форма дифференциальных уравнений векторной линии содержит два уравнения

$$\frac{dx}{A_x(x,y,z)} = \frac{dy}{A_y(x,y,z)}, \quad \frac{dy}{A_y(x,y,z)} = \frac{dz}{A_z(x,y,z)}. \tag{4.2}$$

Интегрируя систему (4.2), получим уравнения поверхностей $F_1(x, y, z) = c_1$ и $F_2(x, y, z) = c_2$, в которых постоянные c_1, c_2 определяются точкой пространства $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую должна пройти векторная линия: $c_1 = F_1(x_0, y_0, z_0)$, $c_2 = F_2(x_0, y_0, z_0)$. Соответствующей векторной линией в этом случае будет линия пересечения поверхностей $F_1(x, y, z) = c_1$ и $F_2(x, y, z) = c_2$.

Если векторная функция $\vec{A}(x, y, z)$ определяет поле сил, векторные линии называют *силовыми линиями*.

Упражнение 4.1. Построить векторные линии поля $\vec{r} = \vec{i}2ax-$
$-\vec{j}2ay$, где a - постоянная.

Решение. Воспользуемся системой уравнений (4.1)

$$\frac{dx}{2ax} = dt; \quad \frac{dy}{2ay} = dt; \quad \frac{dz}{0} = dt.$$

Непосредственным интегрированием уравнений получим параметрическое представление векторных линий

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2at}, \\ y = c_2 e^{-2at}, \\ z = c_3, \end{cases} \tag{4.3}$$

где c_1, c_2, c_3 - постоянные интегрирования. Из (4.3) вытекает, что векторные линии лежат в плоскости $z = c_3 - const$, а координаты x, y связаны соотношением $xy = c_1 c_2 = c - const$. Таким образом, векторными линиями рассматриваемого поля будут параболы $y = c/x$ в плоскостях $z = const$.

Упражнение 4.2. В *упражнении 4.1* определить векторную линию, проходящую через точку $O(1, 3, -1)$.

Решение. Воспользуемся параметрическим представлением векторных линий (4.3). Считая, что точка $O(1, 3, -1)$ на линии соответствует значению параметра $t = 0$, определим постоянные c_1, c_2, c_3: $x(t=0) = c_1 = 1$, $y(t=0) = c_2 = 3$, $z(t=0) = c_3 = -1$. Искомая векторная линия определяется параметрически уравнениями $x = e^{2at}$, $y = 3e^{-2at}$, $z = -1$.

Упражнение 4.3. Определить векторные линии, поля $\vec{r} = \vec{i}by+$
$+\vec{j}bx$, где b -постояннная.

Решение. Воспользуемся уравнениями векторных линий в форме (4.2)

$$\frac{dx}{by} = \frac{dy}{bx}, \quad \frac{dy}{bx} = \frac{dz}{0}.$$

Приводя первое уравнения к виду $x\,dx - y\,dy = 0$ и интегрируя его, получим уравнение поверхности $x^2 - y^2 = c_2 - const$. Второе уравнение дает $dz = 0$ или $z = c_1 - const$. Векторными линиями являются линии пересечения этих поверхностей. Они лежат в плоскостях, соответсвующих постоянному значению координаты z, и имеют вид гипербол.

Задачи

4.1 Найти векторные линии следующих векторных полей:

$$
\begin{aligned}
&a)\, \vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z, \\
&b)\, \vec{A} = \vec{i}\,m_1 + \vec{j}\,m_2 + \vec{k}\,m_3, \qquad m_1, m_2, m_3 - \qquad , \\
&c)\, \vec{A} = \vec{i}\,(z - y) + \vec{j}\,(x - z) + \vec{k}\,(y - x), \\
&d)\, \vec{A} = \vec{i}\,x^2 + \vec{j}\,y^2, \\
&e)\, \vec{A} = \vec{c} \times \vec{r}, \qquad \vec{c} - \qquad .
\end{aligned}
$$

4.2 Найти векторную линию векторного поля $\vec{r} = \vec{i}\,e^x + \vec{j}\,e^{-y} + \vec{k}\,z$, проходящую через точку $O(-1, 0, 1)$.

4.3 Найти векторную линию векторного поля $\vec{r} = \vec{i}\,y + \vec{j}\,x + \vec{k}\,x$, проходящую через точку $O(2, 1, 0)$.

5 Дивергенция поля, ротор и производная по направлению векторного поля. Теоремы Остроградского - Гаусса и Стокса.

Пусть $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \vec{i}\,A_x(x, y, z) + \vec{j}\,A_y(x, y, z) + \vec{k}\,A_z(x, y, z)$ - дифференцируемое векторное поле.

Скаляр

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{5.1}$$

называется *дивергенцией* этого поля.

Вектор

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \tag{5.2}$$

называется *ротором* поля $\vec{A}$.

Скорость изменения векторной функции $\vec{A}(\vec{r})$ в направлении, задаваемом единичным вектором $\vec{l}$, называется *производной по направлению* $\dfrac{d\vec{A}}{dl}$ и определяется соотношением

$$\frac{d\vec{A}}{dl} = \vec{i}\,\frac{dA_x}{dl} + \vec{j}\,\frac{dA_y}{dl} + \vec{k}\,\frac{dA_z}{dl}, \tag{5.3}$$

в котором производные по направлению от компонент поля $dA_\alpha/dl\,(\alpha = x, y, z)$ определяются формулой (3.3).

Потоком векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ через поверхность S называется поверхностный интеграл

$$\int\limits_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \int\limits_S A_n\,dS. \tag{5.4}$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности S, $A_n = \vec{A}\cdot\vec{n}$. Интегрирование может проводиться как по замкнутой, так и по незамкнутой поверхности S.

Циркуляцией вектора $\vec{A}(\vec{r})$ по некоторой замкнутой кривой L называется интеграл

$$\oint\limits_L \vec{A}\cdot\vec{\tau}dl, \tag{5.5}$$

где $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к кривой L, определяющий направление обхода кривой.

Для дифференцируемых векторных полей выполняются следующие теоремы:

Теорема Остроградского – Гаусса : *Поток векторного поля через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции поля по объему, ограниченному этой поверхностью*

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{A}\, dV. \tag{5.6}$$

Здесь S - поверхность, ограничивающая объем V, $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности S.

Теорема Стокса: *Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру* равна потоку ротора поля через поверхность, ограниченную этим контуром

$$\oint_L \vec{A} \cdot \vec{\tau}\, dL = \int_S \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{A}\, dS. \tag{5.7}$$

Контур L, если смотреть с конца вектора $\vec{n}$, обходится против часовой стрелки; направление обхода контура определяет направление единичного вектора касательной $\vec{\tau}$ в циркуляции.

Векторное поле называется *потенциальным* в области V, если в каждой точке этой области

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = 0. \tag{5.8}$$

Поле $\vec{A}$ является потенциальным тогда и только тогда, когда $\vec{A}$ есть градиент некоторой скалярной функции $-u$:

$$\vec{A} = -\operatorname{grad} u, \tag{5.9}$$

которая называется *скалярным потенциалом поля* $\vec{A}$. Если векторная функция $\vec{A}(x, y, z)$ определяет силовое поле, ее потенциал u называется *потенциальной энергией.* Потенциал векторного поля определяется с точностью до константы.

Векторное поле $\vec{A}$ называется *вихревым* (соленоидальным) в области V, если в каждой точке этой области

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{5.10}$$

Векторное поле является вихревым тогда и только тогда, когда $\vec{A}$ есть ротор некоторой векторной функции $\vec{\Psi}$

$$\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{\Psi}, \tag{5.11}$$

которая называется *векторным потенциалом* поля $\vec{A}$. Векторный потенциал $\vec{\Psi}$ определен с точностью до градиента скалярной функции.

Упражнение 5.1. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{A} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{z}{x^2+y^2}\right)$ в точке $O(1,-1,2)$.

Решение. Дифференцируя компоненты вектора $\vec{A}$, получим

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Подставляя в полученное выражение координаты точки O, находим $\operatorname{div}\vec{A}\Big|_O = 1/2$.

Упражнение 5.2. Найти точки пространства, в которых ротор векторного поля $\vec{A} = \left(z^2-y^2, x^2-y^2, y^2-x^2\right)$ обращается в ноль.

Решение. Вычислим по формуле (5.2) ротор поля

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2-y^2 & x^2-y^2 & y^2-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(y^2-x^2)-\frac{\partial}{\partial z}(z^2-x^2)\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}(z^2-y^2)-\frac{\partial}{\partial x}(y^2-x^2)\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2-z^2)-\frac{\partial}{\partial y}(z^2-y^2)\right)=$$

$$=\vec{i}2(x+y)+\vec{j}2(y+z)+\vec{k}2(x+z).$$

Приравнивая нулю компоненты $\mathrm{rot}\vec{A}$

$$\begin{cases} x+y=0, \\ y+z=0, \\ x+z=0, \end{cases}$$

находим единственную точку $O(0,0,0)$, в которой обращается в ноль $\mathrm{rot}\vec{A}$.

Упражнение 5.3. Найти производную векторного поля $\vec{A}=(xy,yz,zx)$ в направлении вектора $\vec{l}=(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})$.

Решение. Воспользуемся формулами (5.3) и (3.3)

$$\frac{d\vec{A}}{dl}=\vec{i}\,\frac{dA_x}{dl}+\vec{j}\,\frac{dA_y}{dl}+\vec{k}\,\frac{dA_z}{dl}=$$

$$=\vec{i}\,\left(\vec{l}\cdot\mathrm{grad}(xy)\right)+\vec{j}\,\left(\vec{l}\cdot\mathrm{grad}(yz)\right)+\vec{k}\,\left(\vec{l}\cdot\mathrm{grad}(zx)\right)=$$

$$=\left(\frac{x+y}{\sqrt{6}},\frac{z+2y}{\sqrt{6}},\frac{z+2x}{\sqrt{6}},\right).$$

Упражнение 5.4. Доказать, что поле $\vec{A}=\vec{a}\times\mathrm{grad}\varphi$, где $\vec{a}$ постоянный вектор, вихревое.

Решение. Необходимо доказать, что $\mathrm{div}\vec{A}=0$. Найдем компоненты вектора $\vec{A}$

$$\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(a_y\frac{\partial\varphi}{\partial z}-a_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\vec{j}\left(a_z\frac{\partial\varphi}{\partial x}-a_x\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(a_x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-a_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

и вычислим по формуле (5.1) дивергенцию

$$\mathrm{div}A = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_y\frac{\partial\varphi}{\partial z} - a_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_z\frac{\partial\varphi}{\partial x} - a_x\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(a_x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - a_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) =$$

$$= a_x\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right) + a_y\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right) + a_z\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) = 0,$$

ч.т.д.

Упражнение 5.5. Определить, имеет ли данное поле

$$\vec{A} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k},$$

потенциал u и найти его, если он существует.

Решение. Вычислим ротор поля $\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0$, следовательно, поле потенциальное. Для потенциала u получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -A_x = -y - z, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -A_y = -x - z, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -A_z = -x - y. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $u = -(y+z)x + v(y,z)$. Подставляя u во второе уравнение, получим уравнение для $v:\ \partial v/\partial y = -z + w(z)$, откуда следует $v = -xz + w(z)$. Подставляя $u = -xy - xz - yz + w(z)$ в третье уравнение, получим $w'(z) = 0$, откуда следует $w = c = const$. Таким образом $u = -xy - xz - yz + c$.

Задачи

5.1 Найти дивергенцию следующих векторных полей

$$a)\ \ \vec{A} = xyz\vec{i} + (2x+3y+z)\vec{j} + (x^2+z^2)\vec{k},$$

$$b)\ \ \vec{A} = (6x^2y^2 - z^3 + yz - 5)\vec{i} + (4x^3y + +xz + 2)\vec{j} + \\ +(xy - 3xz^2 - 3)\vec{k}.$$

5.2 Найти дивергенцию поля $\vec{a} = \dfrac{-\vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке $M(3,4,5)$.

5.3 Найти

$$\operatorname{div} \frac{x+y+z}{xyz}\vec{r}.$$

5.4 Вычислить $a)\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$, $\quad b)\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$.

5.5 Показать, что $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\operatorname{grad}\varphi$, ($\varphi$ - скалярная функция, $\vec{a}$ - переменный вектор).

5.6 Доказать, что $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$.

5.7 Найти $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5.8 Вычислить:

$$a)\operatorname{div}\vec{r};\qquad b)\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r};\qquad c)\operatorname{div}(r\vec{c});$$
$$d)\operatorname{div}[f(r)\vec{c}];\qquad e)\operatorname{div}[f(r)\vec{r}].$$

5.9 Доказать, что ротор поля скоростей твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ равен $2\vec{\omega}$.

5.10 Среда, заполняющая пространство, вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Найти дивергенцию вектора скорости $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ и вектора ускорения $\vec{w} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ в точке $M(x,y,z)$ пространства в данный момент времени.

5.11 Среда, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $\vec{l} = \vec{i}\,\cos\alpha + \vec{j}\,\cos\beta + \vec{k}\,\cos\gamma$ $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$ с постоянной угловой скоростью ω. Найти ротор вектора линейной скорости $\vec{v}$ в точке пространства $M(x,y,z)$ в данный момент времени.

5.12 Найти величину и направление $\operatorname{rot}\vec{a}$ в точке $M(1,2,-2)$, если $\vec{a} = \dfrac{y}{z}\vec{i} + \dfrac{z}{x}\vec{j} + \dfrac{x}{y}\vec{k}$.

5.13 Найти ротор векторных полей:

$$a)\operatorname{rot}\vec{r};\qquad b)\operatorname{rot}(r\vec{c});\qquad c)\operatorname{rot}\vec{c}f(r),$$
$$d)\operatorname{rot}[f(r)\vec{r}];\qquad e)\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot\vec{a})\vec{c},$$

где $\vec{c},\vec{a}$ - постоянные векторы.

5.14 Доказать, что $\mathrm{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi \mathrm{rot}\,\vec{a} + \mathrm{grad}\,\varphi \times \vec{a}$.

5.15 Найти производную радиуса - вектора в направлении вектора $\vec{a}$.

5.16 Найти производную вектора $\vec{b} = \vec{i}\,x^2 + \vec{j}\,y^2 + \vec{k}\,z^2$ в направлении вектора $\vec{a}$.

5.17 Доказать, что

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{a}}{dl} &= \vec{i}\,\frac{da_x}{dl} + \vec{j}\,\frac{da_y}{dl} + \vec{k}\,\frac{da_z}{dl} = \\ &= \cos\alpha\frac{\partial\vec{a}}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial\vec{a}}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial\vec{a}}{\partial z},\end{aligned}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{l}$:
$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

5.18 Доказать, что производная от вектора $\vec{b}\times\vec{r}$ по направлению вектора $\vec{a}$ равна $\vec{b}\times\vec{a}$.

5.19 Показать, что поток радиуса-вектора $\vec{r}$ через любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем V, равен $3V$.

5.20 Доказать, что, если S - замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - постоянные векторы, то

$$\int\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{r})b_n\,ds = (\vec{a}\cdot\vec{b})V.$$

5.21 Найти поток векторного поля $(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{c}$ через замкнутую поверхность S.

5.22 Вычислить поток П векторного поля $\vec{A} = (x^3, y^3, z^3)$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

5.23 Вычислить поток поля напряженности

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

точечного заряда q через сферу радиуса a с центром в точке заряда.

5.24 Вычислить поток поля напряженности

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

точечного заряда q через замкнутую поверхность S, не содержащую внутри себя заряд.

5.25 Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = -\vec{i}\,y + \vec{j}\,x + \vec{k}\,c$, где c – постоянная: a) вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; b) вдоль окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

5.26 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} \times \vec{r}$ по окружности $z = 0$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

5.27 Показать, что поле $\vec{a} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$ - потенциальное и найти потенциал u этого поля.

5.28 Показать, что поля

$$\begin{aligned} &\vec{a} = (6xy + z^3)\vec{i} + (3x^2 - z)\vec{j} + (3xz^2 - y)\vec{k}, \\ &\vec{b} = \varphi \operatorname{grad} \varphi, \end{aligned}$$

где φ - скалярная функция, являются потенциальными.

5.29 Определить, имеют ли векторные поля $\vec{A}$ потенциал u и найти его, если он существует:

$$\begin{aligned} &a) \quad \vec{A} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}, \\ &b) \quad \vec{A} = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}. \end{aligned}$$

5.30 Показать, что поля

$$\begin{aligned} &a)\, \vec{a} = 3y^4z^2\vec{i} + 4x^3z^2\vec{j} - 3x^2y^2\vec{k}, \\ &b)\, \vec{b} = \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi, \end{aligned}$$

где φ и ψ - скалярные функции, являются вихревыми.

5.31 Докажите, что векторное поле $\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}$ будет вихревым только при $\varphi = k/r^3$, где $k = const$.

5.32 Показать, что если поля $\vec{A}$ и $\vec{B}$ - потенциальные, то поле $\vec{A} \times \vec{B}$ является вихревым.

6 Оператор Гамильтона ∇

Все операции дифференцирования полей удобно представить с помощью единого векторного дифференцирующего *оператора Гамильтона* ∇(набла), который в декартовых координатах определяется формулой

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{6.1}$$

Градиент записывается как произведение ∇ на скалярную функцию u, дивергенция – как скалярное произведение вектора ∇ на векторное поле $\vec{A}$, ротор – как векторное произведение вектора ∇ на $\vec{A}$, производная поля по направлению $\vec{l}$ – как действие на поле оператора $\vec{l}\cdot\nabla$:

$$\mathrm{grad}u = \nabla u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{6.2}$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{6.3}$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \tag{6.4}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dl} = (\vec{l}\cdot\nabla)\vec{A} \tag{6.5}$$

С помощью оператора ∇ можно избежать сложных аналитических преобразований при дифференцировании произведений скалярных и векторных полей и быстро получить окончательный результат. Использование оператора ∇ в расчетах и последовательность действий поясняют следующие упражнения.

Упражнение 6.1. Вычислить градиент произведения $\varphi(\vec{r}) = (\vec{a}\cdot\vec{r})f(r)$, в котором $\vec{a}$ - постоянный вектор.

Решение. 1) Выразим градиент через оператор Гамильтона:

$$\mathrm{grad}\varphi(\vec{r}) = \mathrm{grad}[(\vec{a}\cdot\vec{r})f(r)] = \nabla[(\vec{a}\cdot\vec{r})f(r)] \ominus$$

2) Дифференцирование произведения полей аналогично дифференцированию произведения функций в математическом анализе. Поэтому в следующем действии необходимо записать производную произведения как сумму производных исходного выражения, дифференцируя в каждом из слагаемых лишь один сомножитель. В рассматриваемом примере с учетом постоянства вектора $\vec{a}$ искомый градиент запишется как сумма двух производных

$$\ominus \nabla(\vec{a}\cdot \overset{\downarrow}{\vec{r}})f(r) + \nabla(\vec{a}\cdot\vec{r})\ f(\overset{\downarrow}{r}) \ominus$$

В первом слагаемом оператор ∇ действует только на вектор $\vec{r}$ а функция $f(r)$ зафиксирована. Во втором слагаемом вектор $\vec{r}$ считается постоянным и оператор Гамильтона применяется к функции $f(r)$. Дифференцируемые величины обозначаются стрелкой сверху. Данную операцию назовем *разметкой.*

3) Размеченную производную необходимо преобразовать так, чтобы в каждом из слагаемых дифференцируемая функция стояла непосредственно после ∇ и действие оператора Гамильтона на дифференцируюмую величину сводилось к одной из четырех возможностей (6.2)–(6.5). Поскольку в первом слагаемом зафиксирована скалярная функция $f(r)$, то ее можно вынести за знак оператора набла. Во втором слагаемом вектор $\vec{r}$ а, следовательно, и произведение $(\vec{a}\cdot\vec{r})$ считаются постоянными, поэтому скаляр $(\vec{a}\cdot\vec{r})$ также можно вынести за знак набла.

$$\ominus\ f(r)\nabla(\vec{a}\cdot \overset{\downarrow}{\vec{r}}) + (\vec{a}\cdot\vec{r})\nabla\ f(\overset{\downarrow}{r})\ \ominus$$

В первом слагаемом получен градиент функции $(\vec{a}\cdot\vec{r})$: $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \mathrm{grad}\,(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}$, во втором - $\nabla f(r) = \mathrm{grad}\, f(r) = f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$. Окончательный результат имеет вид:

$$\ominus\ f(r)\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{r})f'(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

Замечание. При преобразовании размеченной производной оператор ∇ нужно формально рассматривать как вектор. Полезно помнить следующие приемы преобразования: а) скалярную функцию как и скалярное произведение $(\vec{l}\cdot\nabla)$ можно переместить в формуле на любое место, б) в скалярном произведении сомножители можно менять местами в) в смешаном произведении векторов можно провести круговую перестановку векторов, сохранив знак произведения, либо переставить местами любые два вектора, изменив знак произведения на противоположный,

$$\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{C}\times\vec{A}) = -\vec{B}(\vec{A}\times\vec{C}),$$

г) двойное векторное произведение раскрывается по формуле

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}).$$

Упражнение 6.2. Найти ротор поля $\vec{A} = [\vec{c}\times f(r)\vec{r}]$, где $\vec{c}$ - постоянный вектор.

Решение. Запишем ротор в виде векторного произведения оператора Гамильтона и поля

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla\times[\vec{c}\times f(r)\vec{r}] ⊜$$

Проведем разметку дифференцирования в формуле

$$⊜ \nabla\times\left[\vec{c}\times \overset{\downarrow}{f}(r)\vec{r}\right] + \nabla\times\left[\vec{c}\times f(r)\overset{\downarrow}{\vec{r}}\right] ⊜$$

Преобразуем формулу, поместив дифференцируемую скалярную функцию $\overset{\downarrow}{f}(r)$ в первом слагаемом после набла; во втором слагаемом фиксированную функцию $f(r)$ вынесем перед набла и раскроем двойное векторное произведение

$$⊜ \nabla \overset{\downarrow}{f}(r)\times(\vec{c}\times\vec{r}) + f(r)\nabla\times\left(\vec{c}\times\overset{\downarrow}{\vec{r}}\right) =$$

$$= \nabla \overset{\downarrow}{f}(r)\times(\vec{c}\times\vec{r}) + f(r)\left[\vec{c}(\nabla\cdot\overset{\downarrow}{\vec{r}}) - \overset{\downarrow}{\vec{r}}(\nabla\cdot\vec{c})\right] =$$

$$= \nabla \overset{\downarrow}{f}(r)\times(\vec{c}\times\vec{r}) + \left[\vec{c}(\nabla\cdot\overset{\downarrow}{\vec{r}}) - (\vec{c}\cdot\nabla)\overset{\downarrow}{\vec{r}}\right] ⊜$$

В первом слагаемом действие оператора Гамильтона сводится к вычислению градиента: $\nabla\overset{\downarrow}{f}(r) = \mathrm{grad} f(r) = \dfrac{f'(r)}{r}\vec{r}$. В фигурных скобках в первом слагаемом оператор Гамильтона определяет дивергенцию $\nabla\cdot\overset{\downarrow}{\vec{r}} = 3$, во втором –

производную по направлению $(\vec{c}\cdot\nabla)\overset{\downarrow}{\vec{r}}=\vec{c}$. Учитывая результаты дифференцирования в каждом из слагаемых, получим

$$\ominus\frac{f'(r)}{r}\left[\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{r})-\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{c})\right]+2\vec{c}f(r).$$

Задачи

6.1 Доказать соотношения:

$$)\,\mathrm{rot}\,(u\vec{A})=u\,\mathrm{rot}\,\vec{A}-\vec{A}\times\mathrm{grad}\,u;$$
$$)\,\mathrm{div}\,(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\mathrm{rot}\,\vec{A}-\vec{A}\mathrm{rot}\,\vec{B}.$$

6.2 Доказать соотношения:

$$a)\,\nabla\cdot(\vec{a}r^n)=nr^{n-2}(\vec{r}\cdot\vec{a}),\qquad b)\,\nabla\times(\vec{a}r^n)=nr^{n-2}(\vec{r}\times\vec{a}),$$
$$c)\,\nabla\cdot r^2\vec{a}=2(\vec{r}\cdot\vec{a}),\qquad d)\,\nabla\times(\vec{r}r^n)=0,$$
$$e)\,\nabla\cdot\vec{r}r^n=(n+3)r^n,\qquad f)\,\nabla\times(\vec{a}\,\ln\,r)=\frac{\vec{r}\times\vec{a}}{r^2},$$
$$g)\,\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{r})=0,\qquad h)\,(\vec{l}\cdot\nabla)(\vec{a}\times\vec{r})=\vec{a}\times\vec{l},$$
$$k)\,\nabla\cdot\vec{a}\,\ln\,r=\frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^2},\qquad l\,(\vec{l}\cdot\nabla)(\vec{a}r^n)=nr^{n-2}(\vec{r}\cdot\vec{l})\vec{a},$$
$$m)\,\nabla\times(\vec{a}\times\vec{r})=2\vec{a},\qquad n)\,(\vec{l}\cdot\nabla)(\vec{a}\ln r)=\frac{(\vec{l}\cdot\vec{r})\vec{a}}{r^2}.$$

Здесь $\vec{a},\vec{l}$ - постоянные векторы.

6.3 Вычислить следующие производные:

$$a)\,\nabla\left[\vec{r}(\vec{a}\vec{r})\right],\qquad b)\,\nabla\left[\vec{a}(\vec{c}\cdot\vec{r})\right],$$
$$c)\,\nabla\left[(\vec{r}\times\vec{a})\times\vec{c}\right],\qquad d)\,\nabla\left[(\vec{r}\times\vec{a})\times\vec{r}\right],$$
$$e)\,\nabla\times\left[\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{r})\right],\qquad f)\,\nabla\times\left[\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{r})\right],$$
$$g)\,\nabla\times\left[(\vec{c}\times\vec{r})\times\vec{a}\right],\qquad h)\,\nabla\times\left[(\vec{c}\times\vec{r})\times\vec{r}\right],$$

где $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - постоянные векторы.

6.4 Найти $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})$, где $\vec{A},\vec{B}$ - переменные векторы.

6.5 Найти напряженность $\vec{E}$ электрического поля $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, потенциал φ которого равен:

$$a)\,\varphi = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{r}), \qquad b)\,\varphi = (\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{b}\times\vec{r}),$$
$$c)\,\varphi = (\vec{a}\cdot\vec{r})\cos\vec{b}\cdot\vec{r}, \qquad d)\,\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3},$$
$$e)\,\varphi = F(f(\vec{a}\cdot\vec{r})).$$

Вектора $\vec{a},\vec{b}$ не зависят от координат.

6.6 Найти дивергенцию и ротор следующих векторных полей:

$$a)\,\vec{A} = (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\times\vec{r}), \quad b)\,\vec{A} = \vec{r}\times\vec{f}(r),$$
$$c)\,\vec{A} = \vec{r}\cdot e^{(\vec{r}\times\vec{a})\cdot\vec{b}}, \qquad d)\,\vec{A} = \frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3},$$
$$e)\,\vec{A} = \vec{f}(r)(\cdot a\times\vec{r}), \quad f)\,\vec{A} = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{r})\cos(\vec{c}\cdot\vec{r}),$$
$$g)\,\vec{A} = \vec{a}\,e^{-\alpha r}, \qquad h)\,\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r}(1+\alpha r)\,e^{-\alpha r}.$$

Здесь $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - постоянные векторы, $\alpha - const$.

В задачах **6.7- 6.10** $\vec{m}$ - постоянный вектор.

6.7 Найти

$$a)\quad \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^n};$$
$$b)\quad \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3};$$
$$c)\quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \qquad \vec{r}\neq 0.$$

6.8 Вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$.

6.9 Найти $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^n}$.

6.10 Найти дивергенцию и ротор следующего векторного поля

$$\vec{A} = \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}.$$

6.11 Вычислить $\operatorname{rot}\dfrac{\vec{f}(r)\times\vec{r}}{r}$.

7 Лапласиан скалярного и векторного полей.

Оператор Лапласа (лапласиан) Δ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

определяет дифференцирование второго порядка скалярных и векторных полей; формально оператор Лапласа можно представить как квадрат оператора Гамильтона $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$.

Действие оператора Δ на скалярное поле выражается в декартовых координатах формулой

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{7.1}$$

Если скалярное поле φ строится на радиус – векторе $\vec{r}$ и функциях его модуля $r = |\vec{r}|$, лапласиан поля удобно вычислять по формуле

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla(\nabla\varphi) \tag{7.2}$$

с использованием оператора Гамильтона.

Действие оператора Лапласа на векторное поле в декартовых координатах переносится на компоненты поля

$$\Delta\vec{A} = \big(\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z\big). \tag{7.3}$$

Если векторное поле $\vec{A}$ строится на радиус – векторе $\vec{r}$ и функциях его модуля $r = |\vec{r}|$, лапласиан поля удобно вычислять по формуле

$$\Delta\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}, \tag{7.4}$$

которая вытекает из формулы (1.8) для двойного векторного произведения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla\vec{A}) - (\nabla\nabla)\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A},$$

и также проводить дифференцирование с помощью оператора Гамильтона.

Упражнение 7.1. Вычислить $\Delta\varphi$, где $\varphi = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$.

Решение. Вычисляя вторые производные поля по координатам

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{x}{x^2+y^2+z^2} = 2\frac{x(x^2-3y^2-3z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{x}{x^2+y^2+z^2} = -2\frac{x(x^2+z^2-3y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{x}{x^2+y^2+z^2} = -2\frac{x(x^2+y^2-3z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

и складывая их, получим

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Упражнение 7.2. Вычислить лапласиан векторного поля

$$\vec{A} = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right).$$

Решение. Подействовав оператором Лапласа на компоненты поля

$$\Delta A_x = \Delta\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0,$$
$$\Delta A_y = \Delta\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0,$$
$$\Delta A_z = \Delta\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0,$$

получим $\Delta\vec{A} = \big(\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z\big) = (0,0,0) = \vec{0}$ - нулевой вектор.

Задачи

7.1 Непосредственным дифференцированием вычислить лапласиан скалярного поля $\Delta\varphi$ для следующих полей:

$$a)\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$
\begin{aligned}
&b)\varphi = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\
&c)\varphi = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\\
&d)\varphi = \ln(xyz),\\
&e)\varphi = \ln(x^2+y^2).
\end{aligned}
$$

7.2 Найти: $a)\,\mathrm{div}\,(\varphi\,\mathrm{grad}\,\varphi)$, $b)\,\mathrm{div}\,(\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi)$.

7.3 Непосредственным дифференцированием вычислить лапласиан векторного поля $\Delta\vec{A}$ для следующих полей:

$$
\begin{aligned}
&a)\vec{A} = \left(x^3y, y^3z, z^3x\right),\\
&b)\vec{A} = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right),\\
&c)\vec{A} = \left(\ln(y^2+z^2), \ln(z^2+x^2), \ln(x^2+y^2)\right).
\end{aligned}
$$

7.4 Используя оператор Гамильтона, вычислить по формуле (7.2) лапласиан следующих скалярных полей:

$$
a)\varphi = \frac{1}{r^n}, \quad b)\varphi = \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^n}, \quad c)\varphi = f(r), \quad d)\varphi = 3 + 2\frac{r}{R} - \frac{r^2}{2R^2}.
$$

Здесь $\vec{d}$ - постоянный вектор, R -константа.

7.5 Используя оператор Гамильтона, вычислить по формуле (7.4) лапласиан следующих векторных полей:

$$
\begin{aligned}
&a)\vec{A} = \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}, && b)\vec{A} = \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^n},\\
&c)\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^n}, && d)\vec{A} = \vec{f}(r),\\
&e)\vec{A} = f(r)(\vec{m}\times\vec{r}).
\end{aligned}
$$

Здесь $\vec{m}$ - постоянный вектор.

8 Криволинейные координаты

Криволинейными координатами называются функции декартовых координат $x^1 = x^1(x,y,z)$, $x^2 = x^2(x,y,z)$, $x^3 = x^3(x,y,z)$, имеющие конечный якобиан I :

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x} & \dfrac{\partial x^1}{\partial y} & \dfrac{\partial x^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial x} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y} & \dfrac{\partial x^2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial x} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y} & \dfrac{\partial x^3}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0, \infty\,. \tag{8.1}$$

Замечание: Определение сохраняется, если неравенство
$I \neq 0, \infty$ нарушается на множестве точек меры 0.

Выбор координат в описании физических явлений чаще всего диктуется симметрией задачи. Наиболее употребимы *сферические координаты* r, θ, ψ (соответственно – расстояние до начала координат, полярный и азимутальный углы) и *цилиндрические координаты* r, ψ, z (соответственно – расстояние до оси z, полярный угол и z-координата). Сферические координаты определяются через декартовы и декартовы через сферические соотношениями:

$$\begin{cases} x^1 = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ x^2 = \theta = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ x^3 = \psi = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x = r\,\sin\theta\,\cos\psi, \\ y = r\,\sin\theta\,\sin\psi, \\ z = r\,\cos\theta. \end{cases} \tag{8.2}$$

Цилиндрические координаты определяются через декартовы и декартовы через цилиндрические соотношениями:

$$\begin{cases} x^1 = r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ x^2 = \psi = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, \\ x^3 = z, \end{cases} ; \begin{cases} x = r\,\cos\psi, \\ y = r\,\sin\psi, \\ z = z. \end{cases} \tag{8.3}$$

Поверхности $x^\alpha = const (\alpha = 1,2,3)$ называются *координатными поверхностями*, линии пересечения координатных поверхностей – *координатными* *кривыми.* Номер координатной линии совпадает с номером пересекаемой ею координатной поверхности.

В криволинейных координатах вектор может быть представлен разложением по ковариантному, контравариантному или физическому базисам. *Ковариантным базисом* называется тройка векторов $\vec{e}_\alpha = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x^\alpha}$, *контравариантным базисом* – тройка векторов $\vec{e}^{\,\alpha} = \operatorname{grad} x^\alpha$, $(\alpha = 1, 2, 3)$. Вектора $\vec{e}^{\,\alpha}$ ортогональны координатным поверхностям x^α, вектора $\vec{e}_\alpha$ направлены вдоль соответствующих координатных кривых. Ковариантные и контравариантные базисы удовлетворяют условию взаимности: $\vec{e}_\alpha \vec{e}^{\,\beta} = \delta_\alpha^\beta$ (δ_α^β - символ Кронеккера). Криволинейные координаты для которых базисные вектора $\vec{e}_\alpha$ взаимно ортогональны называются *ортогональными.* Нормированный ковариантный базис $\vec{i}_\alpha = \dfrac{\vec{e}_\alpha}{\sqrt{\vec{e}_\alpha \vec{e}_\alpha}}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ называется *физическим.*

В отличие от декартовых координат, в которых базисные вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеют постоянную единичную длину и направление во всех точках пространства, ковариантные и контравариантные базисные вектора меняют свою длину и направление при переходе от одной точки пространства к другой.

Матрица $\hat{g}$ с компонентами $g_{\alpha\beta} = (\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta)$ называется *метрическим тензором*, матрица $\hat{g}'$ с компонентами $g^{\alpha\beta} = \left(\vec{e}^{\,\alpha} \vec{e}^{\,\beta}\right)$ – *фундаментальным тензором.* Матрицы $\hat{g}$ и $\hat{g}'$ обратные:

$$\sum_{\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma.$$

По виду тензоров $\hat{g}$ и $\hat{g}\,'$ можно судить о соответствующих им координатах. Если компонентами матриц $\hat{g}$ и $\hat{g}\,'$ являются функции, кординатными линиями будут кривые, в этом случае речь идет именно о криволинейных координатах. Если матрицы $\hat{g}$ и $\hat{g}\,'$ диагональны, а их компоненты – числа, координатными линиями будут прямые; в этом случае речь идет о неортогональных координатах. В ортогональных координатах матрицы $\hat{g}$ и обратная ей $\hat{g}\,'$ одновременно диагональны; отсюда, в частности, следует, что контравариантные базисные вектора в ортогональных координатах также взаимно ортогональны.

Тензора $\hat{g}$ и $\hat{g}\,'$ позволяют определить контравариантный базис по ковариантному и наоборот:

$$\vec{e}^{\,\alpha} \,=\, g^{\alpha\beta}\,\vec{e}_\beta, \qquad \vec{e}_\alpha \,=\, g_{\alpha\beta}\,\vec{e}^{\,\beta}. \tag{8.4}$$

Здесь и везде далее использовано *правило суммирования*: если в некотором выражении индекс встречается дважды, один раз как ковариантный и один раз как контравариантный, то по этому индексу проводится суммирование. Например

$$g^{\alpha\beta}\,\vec{e}_\beta = g^{\alpha 1}\,\vec{e}_1 + g^{\alpha 2}\,\vec{e}_2 + g^{\alpha 3}\vec{e}_3, \quad A_k B^k = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3.$$

Вектор $\vec{A}$ представлен в *ковариантном базисе контравариантными компонентами* A^α, в *контравариантном базисе – ковариантными компонентами* A_α и в *физическом базисе – физическими компонентами* $\tilde{A}_\alpha = A^\alpha\sqrt{\vec{e}_\alpha\vec{e}_\alpha}$:

$$\vec{A} \,=\, A^\alpha\,\vec{e}_\alpha \,=\, A_\alpha\,\vec{e}^{\,\alpha} \,=\, \sum_{\alpha=1}^{3}\tilde{A}_\alpha\,\vec{i}_\alpha \tag{8.5}$$

Переход от контравариантных к ковариантным компонентам вектора называется операцией опускания индекса, переход от ковариантных к контравариантным – операцией подъема индекса; первая осуществляется с помощью метрического тензора, вторая – с помощью фундаментального тензора:

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta}A^\beta, \quad A^\alpha = g^{\alpha\beta}A_\beta. \tag{8.6}$$

Переход от декартовых компонет вектора к ковариантным и контравариантным и обратный определяется формулами

$$\begin{aligned} A_\alpha &= A_x\frac{\partial x}{\partial x^\alpha} + A_y\frac{\partial y}{\partial x^\alpha} + A_z\frac{\partial z}{\partial x^\alpha} \,=\, \left(\vec{A}\cdot\vec{e}_\alpha\right), \\ A^\alpha &= A_x\frac{\partial x^\alpha}{\partial x} + A_y\frac{\partial x^\alpha}{\partial y} + A_z\frac{\partial x^\alpha}{\partial z} \,=\, \left(\vec{A}\cdot\vec{e}^{\,\alpha}\right), \end{aligned} \tag{8.7}$$

$$A_\xi = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} = A^\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} \qquad \xi = x, y, z.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в криволинейных координатах выражается через их компоненты следующим образом:

$$\vec{A}\vec{B} = A_\alpha B^\alpha = A^\alpha B_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = g^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta. \tag{8.8}$$

Векторное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в криволинейных координатах дается определителями:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \vec{e}^{\,1} & \vec{e}^{\,2} & \vec{e}^{\,3} \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix}, \tag{8.9}$$

где $g = \det \hat{g}$ – определитель метрического тензора. В первом случае при раскрытии определителя получится представление $\operatorname{rot}\vec{A}$ в ковариантном базисе, во втором случае - в контравариантном базисе. Формула (8.9) для векторного произведения справедлива также в любом неортонормированном базисе.

Замечание: Для нумерации базисных векторов, компонент векторов и тензоров в конкретных координатах удобнее использовать не числовые индексы, а буквенные, совпадающие с соответствующими координатами: $\vec{e}_r, \vec{e}^{\,\theta}, A^\psi, g^{\psi z}, g_{r\psi}$ и т.д.

Упражнение 8.1. Можно ли выбрать в качестве криволинейных координат функции σ, τ, ψ :

$$\begin{cases} \sigma = \sqrt{r+z}, \\ \tau = \sqrt{r-z}, \\ \psi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Решение. Определим частные производные функций σ, τ, ψ по x, y, z

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{r+z}}\,\frac{x}{r}, &&\frac{\partial\sigma}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{r+z}}\,\frac{y}{r}, &&\frac{\partial\sigma}{\partial z}=\frac{1}{2\sqrt{r+z}}\,\left(\frac{z}{r}+1\right),\\
&\frac{\partial\tau}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{r-z}}\,\frac{x}{r}, &&\frac{\partial\tau}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{r-z}}\,\frac{y}{r}, &&\frac{\partial\tau}{\partial z}=\frac{1}{2\sqrt{r-z}}\,\left(\frac{z}{r}-1\right),\\
&\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}, &&\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}, &&\frac{\partial\psi}{\partial z}=0
\end{aligned}
$$

и вычислим якобиан I

$$
I\;=\begin{vmatrix}
\frac{1}{2\sqrt{r+z}}\,\frac{x}{r}, & \frac{1}{2\sqrt{r+z}}\,\frac{y}{r}, & \frac{1}{2\sqrt{r+z}}\,\left(\frac{z}{r}+1\right)\\
\frac{1}{2\sqrt{r-z}}\,\frac{x}{r}, & \frac{1}{2\sqrt{r-z}}\,\frac{y}{r}, & \frac{1}{2\sqrt{r-z}}\,\left(\frac{z}{r}-1\right)\\
\frac{-y}{x^2+y^2}, & \frac{x}{x^2+y^2}, & 0
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\frac{1}{2r\sqrt{r^2-z^2}}=\frac{1}{2r\sqrt{x^2+y^2}}.
$$

Якобиан I обращается в бесконечность $I=\infty$ лишь на оси z, поэтому функции σ,τ,ψ можно выбрать в качестве криволинейных координат.

Декартовы и криволинейные координаты x,y,z и σ,τ,ψ взаимно однозначно определяют друг друга всюду за исключением оси z. Выразим декартовы координаты через криволинейные

$$
\begin{cases}
x=\sigma\tau\,\cos\,\psi,\\
y=\sigma\tau\,\sin\,\psi,\\
z=\dfrac{1}{2}(\sigma^2-\tau^2).
\end{cases}
$$

Упражнение 8.2. Для криволинейных координат σ,τ,ψ, рассмотренных в упражнении 8.1, определить координатные поверхности и координатные кривые.

Решение. Фиксируя значения криволинейных координат $\sigma=c_1,\tau=c_2,\psi=c_3$, ($c_k$ - константы), выразим координату z через x,y,c_k из первых двух равенств

$$\sigma = c_1, \qquad \Longrightarrow z = \frac{c_1^4 - x^2 - y^2}{2c_1^2};$$
$$\tau = c_2, \qquad \Longrightarrow z = \frac{x^2 + y^2 - c_2^4}{2c_2^2}$$

и найдем связь x и y из последнего равенства.

$$\psi = c_3 \qquad \Longrightarrow y = \mathrm{tg} c_3\, x.$$

Поверхности $\sigma = c_1, \tau = c_2$, представляют параболоиды, имеющие осью вращения ось z, первый параболоид обращен выпуклостью вверх, второй - вниз. Поверхность $\psi = c_3$ представляет полуплоскость, имеющую краем ось z, и составляющую угол ψ с осью x. Координатная кривая σ получается в пересечении параболоида $\tau = c_2$ и полуплоскости $\psi = c_3$ и представляет половину параболы, обращенную вверх; координатная кривая τ получается в пересечении параболоида $\sigma = c_2$ и полуплоскости $\psi = c_3$ и представляет половину параболы, обращенную вниз; координатная кривая ψ получается в пересечении параболоидов и представляет собой окружность.

Упражнение 8.3. Для криволинейных координат, рассмотренных в упражнении 8.1, построить ковариантный и контравариантный базисы, метрический и фундаментальный тензора.

Решение. Воспользуемся выражением для декартовых координат через криволинейные (см. упражнение 8.1):

$$\begin{cases} x = \sigma\tau\, \cos\, \psi, \\ y = \sigma\tau\, \sin\, \psi, \\ z = \dfrac{1}{2}(\sigma^2 - \tau^2). \end{cases}$$

и найдем вектора ковариантного базиса, которые определяются производными декартовых координат по криволинейным:

$$\begin{cases} \vec{e}_\sigma = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \sigma}, \dfrac{\partial y}{\partial \sigma}, \dfrac{\partial z}{\partial \sigma}\right) = (\tau\, \cos\, \psi,\, \tau\, \sin\, \psi,\, \sigma)\,, \\ \vec{e}_\tau = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \tau}, \dfrac{\partial y}{\partial \tau}, \dfrac{\partial z}{\partial \tau}\right) = (\sigma\, \cos\, \psi,\, \sigma\, \sin\, \psi,\, -\tau)\,, \\ \vec{e}_\psi = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \psi}, \dfrac{\partial y}{\partial \psi}, \dfrac{\partial z}{\partial \psi}\right) = (-\sigma\tau\, \sin\, \psi,\, \sigma\tau\, \cos\, \psi,\, 0)\,. \end{cases}$$

Скалярные произведения векторов ковариантного базиса определяют компоненты метрического тензора $\hat{g}$:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_\sigma\vec{e}_\sigma) & (\vec{e}_\sigma\vec{e}_\tau) & (\vec{e}_\sigma\vec{e}_\psi) \\ (\vec{e}_\tau\vec{e}_\sigma) & (\vec{e}_\tau\vec{e}_\tau) & (\vec{e}_\tau\vec{e}_\psi) \\ (\vec{e}_\psi\vec{e}_\sigma) & (\vec{e}_\psi\vec{e}_\tau) & (\vec{e}_\psi\vec{e}_\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2+\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2+\tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2\tau^2. \end{pmatrix}.$$

Фундаментальный тензор $\hat{g}'$ находится как матрица, обратная $\hat{g}$:

$$\hat{g}' = \hat{g}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma^2+\tau^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sigma^2+\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sigma^2\tau^2} \end{pmatrix}.$$

Контравариантные базисные вектора построим по формулам перехода $\vec{e}^{\,i} = g'^{\,ik}\vec{e}_k$. Учитывая диагональность фундаментального тензора, получим

$$\begin{cases} \vec{e}^{\,\sigma} = g'^{\,\sigma\sigma}\,\vec{e}_\sigma = \left(\dfrac{\tau}{\sigma^2+\tau^2}\cos\psi,\, \dfrac{\tau}{\sigma^2+\tau^2}\sin\psi,\, \dfrac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2}\right), \\ \vec{e}^{\,\tau} = g'^{\,\tau\tau}\,\vec{e}_\tau = \left(\dfrac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2}\cos\psi,\, \dfrac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2}\sin\psi,\, -\dfrac{\tau}{\sigma^2+\tau^2} - \tau\right), \\ \vec{e}^{\,\psi} = g'^{\,\psi\psi}\,\vec{e}_\psi = \left(-\dfrac{1}{\sigma\tau}\sin\psi,\, \dfrac{1}{\sigma\tau}\cos\psi,\, 0\right). \end{cases}$$

Упражнение 8.4. Рассматривая представление вектора $\vec{A}$ в декартовых координатах и криволинейных координатах σ, τ, ψ (см. упражнение 8.1), выразить ковариантные и контравариантные компоненты вектора через декартовы компоненты и последние - через ковариантные и контравариантные.

Решение. Воспользуемся формулами (8.7) и выражениями для базисных векторов, полученными в упражнении (8.3).

Согласно (8.7) ковариантные и контравариантные компоненты следующим образом выражаются через декартовы:

ковариантные –

$$\begin{aligned}
A_\sigma &= \left(\vec{e}_\sigma \cdot \vec{A}\right) = A_x \tau \cos\psi + A_y \tau \sin\psi + A_z \sigma,\\
A_\tau &= \left(\vec{e}_\tau \cdot \vec{A}\right) = A_x \sigma \cos\psi + A_y \sigma \sin\psi - A_z \tau \sigma,\\
A_\psi &= \left(\vec{e}_\psi \cdot \vec{A}\right) = -A_x \sigma\tau \sin\psi + A_y \sigma\tau \cos\psi;
\end{aligned}$$

контравариантные –

$$\begin{aligned}
A^\sigma &= \left(\vec{e}^{\,\sigma} \cdot \vec{A}\right) = \frac{1}{\sigma^2+\tau^2} A_\sigma,\\
A^\tau &= \left(\vec{e}^{\,\tau} \cdot \vec{A}\right) = \frac{1}{\sigma^2+\tau^2} A_\tau,\\
A^\psi &= \left(\vec{e}^{\,\psi} \cdot \vec{A}\right) = \frac{1}{\sigma^2\tau^2} A_\psi.
\end{aligned}$$

Декартовы компоненты в свою очередь выражаются через ковариантные и контраваривантные следующим образом:
через ковариантные –

$$\begin{aligned}
A_x &= A_i \frac{\partial x^i}{\partial x} = A_\sigma \frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2} \cos\psi + A_\tau \frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2} \cos\psi - A_\psi \frac{1}{\sigma\tau} \sin\psi,\\
A_y &= A_i \frac{\partial x^i}{\partial y} = A_\sigma \frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2} \sin\psi + A_\tau \frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2} \sin\psi + A_\psi \frac{1}{\sigma\tau} \cos\psi,\\
A_z &= A_i \frac{\partial x^i}{\partial z} = A_\sigma \frac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2} - A_\tau \frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2};
\end{aligned}$$

через контравариантные –

$$\begin{aligned}
A_x &= A^i \frac{\partial x}{\partial x^i} = A^\sigma \tau \cos\psi + A^\tau \sigma \cos\psi - A^\psi \sigma\tau,\\
A_y &= A^i \frac{\partial y}{\partial x^i} = A^\tau \tau \sin\psi + A^\tau \sigma \sin\psi + A^\psi \sigma\tau,\\
A_z &= A^i \frac{\partial z}{\partial x^i} = A^\sigma \sigma - A^\tau \tau.
\end{aligned}$$

Упражнение 8.5. Вывести в координатах σ, τ, ψ (упражнение 8.1) выражение для квадрата длины элементарного вектора $d\vec{r}$ с ковариантными компонентами $d\sigma, d\tau, d\psi$.

Решение. Воспользуемся формулой (8.8) для скалярного произведения в криволинейных координатах и видом фундаментального тензора, полученного в упражнении 8.3:

$$d\vec{r}^{\,2} = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = g^{\alpha\beta}dr_\alpha dr_\beta =$$
$$= g^{\sigma\sigma}(d\sigma)^2 + g^{\tau\tau}(d\tau)^2 + g^{\psi\psi}(d\psi)^2 =$$
$$= \frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\left[(d\sigma)^2 + (d\tau)^2 + \left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)(d\psi)^2\right].$$

Задачи

8.1 Убедиться, что координаты x^1, x^2, x^3 могут быть взяты в качестве криволинейных, построить координатные поверхности и координатные линии, ковариантный и контравариантный базисы, метрический и фундаментальный тензора:

$$a)x^1 = ax,\ x^2 = by,\ x^3 = cz, \qquad a, b, c > 0;$$
$$b)x^1 = x+y,\ x^2 = x-y,\ x^3 = 2z;$$
$$c)x^1 = xy,\ x^2 = \frac{x}{y},\ x^3 = z^3.$$

8.2 Каковы координатные линии и координатные поверхности "псевдоцилиндрической"системы координат r, ψ, z, связанной с декартовыми координатами соотношениями: $x = ar\,\sin\,\psi$,
$y = br\,\cos\,\psi,\ z = z,\ (\ 0 \le r \le +\infty,\ 0 \le \psi < 2\pi,$
$-\infty < z < +\infty,\ \ a \ne b).$

8.3 Каковы координатные линии и координатные поверхности "псевдосферической"системы координат r, θ, ψ, связанной с декартовыми координатами соотношениями: $x = ar\,\sin\theta\cos\,\psi, \quad y =$
$= br\,\sin\,\theta\,\sin\,\psi,\ z = cr\,\cos\,\theta,\ (\ 0 \le r \le +\infty, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$
$0 \le \psi < 2\pi, \quad a \ne b \ne c \ne a).$

8.4 Доказать, что из взаимности ковариантного и контравариантного базисов в виде $\vec{e}_\alpha \vec{e}^{\,\beta} = \delta_\alpha^\beta$ следуют формулы преобразования базисных векторов:

$$a) \quad \vec{e}^{\,1} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\vec{e}_1\,[\vec{e}_2 \times \vec{e}_3]}, \qquad\qquad b) \quad \vec{e}_1 = \frac{\vec{e}^{\,2} \times \vec{e}^{\,3}}{\vec{e}^{\,1}\,[\vec{e}^{\,2} \times \vec{e}^{\,3}]},$$

циклическая перестановка индексов в которых дает вектора $\vec{e}^{\,2}$, $\vec{e}^{\,3}$, (а) и $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3\,(\,b\,)$.

8.5 Являются ли ортогональными "псевдоцилиндрическая"и "псевдосферическая "системы координат (см. зад. 8.2, 8.3)?

8.6 Построить контравариантный базис в криволинейных координатах σ, τ, θ, если ковариантные базисные вектора в декартовых координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_\sigma &= (\tau\,\cos\,\theta,\ \tau\,\sin\,\theta,\ -\sigma)\\
\vec{e}_\tau &= (\sigma\,\cos\,\theta,\ \sigma\,\sin\,\theta,\ \tau)\\
\vec{e}_\theta &= (-\tau\sigma\,\sin\,\theta,\ \tau\sigma\,\cos\,\theta,\ 0).
\end{aligned}$$

8.7 Построить ковариантный базис в криволинейных координат u, v, z, если контравариантные базисные вектора в декартовых координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{e}^{\,u} &= (a\,sh\,u\,\cos\,v,\ a\,ch\,u\,\sin\,v,\ 0)\\
\vec{e}^{\,v} &= (-a\,ch\,u\,\sin\,v,\ a\,sh\,u\,\cos\,v,\ 0)\\
\vec{e}^{\,z} &= (0,\ 0,\ 1), \qquad a\,>\,0.
\end{aligned}$$

8.8 В криволинейных координатах, данных в задаче 8.1, построить ковариантные, контравариантные и физические компоненты векторов $\vec{A}$, заданных в декартовом базисе:

$$a)\vec{A} = (1, 4, -2); \qquad b)\vec{A} = (1, 1, 1);$$
$$c)\vec{A} = (-3, 0, 4); \qquad d)\vec{A} = (1, -2, -1).$$

8.9 Построить координатные поверхности и координатные линии, ковариантный и контравариантный базисы, метрический и фундаментальный тензора для следующих координат:

a) цилиндрические координаты;

b) сферические координаты.

8.10 Выразить физические компоненты вектора $\vec{A}$ через декартовы в цилиндрических координатах.

8.11 Выразить физические компоненты вектора $\vec{A}$ через декартовы в сферических координатах.

8.12 Вывести выражение для квадрата длины элементарного вектора $d\,\vec{r}$:

a) в цилиндрических координатах;

b) в сферических координатах.

8.13 Доказать формулу (8.9) для векторного произведения в криволинейных координатах.

8.14 Записать вид метрического тензора в декартовом базисе.

8.15 Указать, для каких координат метрический тензор, записанный через (x, y, z), имеет вид :

$$a) \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix}, \quad d) \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} r^2 & \frac{1}{4}xy & 0 \\ \frac{1}{4}xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

9 Дифференцирование полей в криволинейных координатах

При дифференцировании по криволинейным координатам x^i индекс i является нижним, ковариантным, поэтому такое дифференцирование называется *ковариантным.* Ковариантное дифференцирование скалярного поля имеет место при вычислении градиента и векторного поля – при вычислении дивергенции, ротора и производной по направлению; все эти производные могут быть записаны через *оператор Гамильтона* $\nabla = \vec{e}^{\,i}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$

Градиент скалярного поля в ковариантном и контравариантном криволинейном базисах определяется формулой

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \vec{e}^{\,i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \vec{e}_i\,g^{ij}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}. \tag{9.1}$$

При дифференцировании векторного поля $\vec{A} = A^i\,\vec{e}_i = A_i\,\vec{e}^{\,i}$ дифференцируются не только компоненты поля, но и базисные вектора $\vec{e}_i$ или $\vec{e}^{\,i}$. Производной ковариантного базисного вектора по криволинейной координате будет также вектор, который может быть представлен как в ковариантном, так и в контравариантном базисах:

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij,k}\,\vec{e}^{\,k} = \Gamma^k_{ij}\,\vec{e}_k. \tag{9.2}$$

Ковариантные компоненты производной $\Gamma_{ij,k}$ называются *символами Кристоффеля первого рода*, контравариантные компоненты Γ^k_{ij} – *символами Кристоффеля второго рода.* Символы Кристоффеля первого рода выражаются через производные от компонент метрического тензора

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{9.3}$$

Символы Кристоффеля первого и второго рода связаны формулами перехода от ковариантных к контравариантным компонентам вектора:

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{ij,l}, \qquad \Gamma_{ij,k} = g_{kl}\Gamma^l_{ij}. \tag{9.4}$$

Ковариантная производная векторного поля $\vec{A}$ в ковариантном базисе приводится к виду

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk}\, A^k \right) \vec{e}_{\,i}. \tag{9.5}$$

Дивергенция векторного поля определяется скалярным произведением оператора Гамильтона и поля и приводится к виду

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, A^i \right). \tag{9.6}$$

Ротор векторного поля $\vec{A}$ определяется векторным произведением оператора Гамильтона и поля

$$\mathrm{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \tag{9.7}$$

Данные определения дивергенции и ротора векторного поля оставляют в силе теоремы Остроградского – Гаусса и Стокса, сформулированные в криволинейных координатах.

Производная векторного поля $\vec{A}$ по направлению $\vec{l}$ определяется выражением

$$\left(\vec{l} \nabla \right) \vec{A} = l^i \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i}, \tag{9.8}$$

в котором ковариантная производная $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial x^i}$ вычисляется по формуле (9.5).

Действие *оператора Лапласа* на скалярное поле φ в криволинейных координатах определяется формулой

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right). \tag{9.9}$$

В ортогональных координатах выражение для $\Delta\varphi$ упрощается

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)\right\}. \tag{9.10}$$

Здесь H_1, H_2, H_3 - постоянные Ламе:

$$H_1 = \sqrt{g_{11}}, \quad H_2 = \sqrt{g_{22}}, \quad H_3 = \sqrt{g_{33}}.$$

Действие оператора Лапласа на векторное поле $\vec{A}$ в криволинейных координатах определяется из формулы для $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$

$$\Delta\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}. \tag{9.11}$$

Для вычисления $\Delta\vec{A}$ необходимо провести дифференцирование в операциях grad, div, rot указанными выше способами. При этом нужно помнить, что первое вычисление ротора дает его представление в ковариантном базисе, т.е. $\operatorname{rot}\vec{A}$ представлен контравариантными компонентами, и перед повторным вычислением ротора необходимо перейти к ковариантным компонентам.

Упражнение 9.1. Для *псевдоцилиндрических координат*, r, ψ, z связанных с декартовыми соотношениями

$$\begin{cases} x = ar\sin\psi, \\ y = br\cos\psi, \\ z = z, \end{cases}$$

где $0 \le r < \infty, 0 \le \psi < 2\pi, -\infty < z < \infty$, определить ненулевые компоненты символов Кристоффеля первого и второго рода.

Решение. Построим для указанных координат ковариантный базис

$$\vec{e}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = (a\sin\psi,\, b\cos\psi,\, 0),$$
$$\vec{e}_\psi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi} = (ar\cos\psi,\, -br\sin\psi,\, 0),$$
$$\vec{e}_z = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = (0,\, 0,\, 1),$$

и, по нему, - метрический и фундаментальный тензора:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & (a^2-b^2)r\sin\psi\cos\psi & 0 \\ (a^2-b^2)r\sin\psi\cos\psi & (a^2+b^2)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{g}' = \hat{g}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2+b^2}{D} & \dfrac{(a^2-b^2)\sin\psi\cos\psi}{r\,D} & 0 \\ \dfrac{(a^2-b^2)\sin\psi\cos\psi}{r\,D} & \dfrac{a^2+b^2}{r^2\,D} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $D = g/r^2 = (a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2\,\sin^2\psi\,\cos^2\psi$.

Метрический тензор диагонален, причем от координат зависит единственная компонента $g_{\psi\psi} = (a^2+b^2)r^2$. Поэтому ненулевыми компонентами символа Кристоффеля, определяемого формулой (9.3) будут те, которые содержат производные $\dfrac{\partial g_{\psi\psi}}{\partial r}$:

$$\Gamma_{\psi\psi,r} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\psi\psi}}{\partial r} = -r(a^2+b^2),$$
$$\Gamma_{\psi r,\psi} = \Gamma_{r\psi,\psi} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\psi\psi}}{\partial r} = r(a^2+b^2).$$

Остальные 24 компоненты символа Кристоффеля равны нулю.

Символы Кристоффеля второго рода Γ^k_{ij} вычислим через символы первого рода по формуле (9.4). С учетом диагональности фундаментального тензора и вида $\Gamma_{ij,k}$, получим следующие ненулевые компоненты

$$\Gamma^r_{\psi\psi} = g^{rr}\Gamma_{\psi\psi,r} = -r,$$
$$\Gamma^\psi_{\psi r} = \Gamma^\psi_{r\psi} = g^{\psi\psi}\Gamma_{\psi r,\psi} = \frac{1}{r}.$$

Упражнение 9.2. Найти физические компоненты градиента скалярного поля $\varphi = r^2(1-\cos^2\psi)\,\sin z$ в псевдоцилиндрической системе координат r, ψ, z (см. упражнение 9.1.).

Решение. Ковариантные компоненты градиента определяются производными

$$(\mathrm{grad}\varphi)_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 2r(1 - 3\,\cos^2\psi)\,\sin\,z,$$
$$(\mathrm{grad}\varphi)_\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = 6r^2\,\cos\,\psi\,\sin\,\psi\,\sin\,z,$$
$$(\mathrm{grad}\varphi)_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = r^2(1 - 3\,\cos^2\psi)\,\cos\,z.$$

Физические компоненты градиента вводятся через контравариантные: $(\widetilde{\mathrm{grad}\varphi})_\alpha = (\mathrm{grad}\varphi)^\alpha\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$; выражая контравариантные компоненты градиента через ковариантные с учетом диагональности метрического тензора и используя для последних найденные выше выражения, получим следующее представление физических компонент градиента

$$(\widetilde{\mathrm{grad}\varphi})_r = (\mathrm{grad}\varphi)^r\sqrt{g_{rr}} = (\mathrm{grad}\varphi)_r/\sqrt{g_{rr}} =$$
$$= \frac{2r}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(1 - 3\,\cos^2\psi)\,\sin\,z,$$
$$(\widetilde{\mathrm{grad}\varphi})_\psi = (\mathrm{grad}\varphi)^\psi\sqrt{g_{\psi\psi}} = (\mathrm{grad}\varphi)_\psi/\sqrt{g_{\psi\psi}} =$$
$$= \frac{6r}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\cos\,\psi\,\sin\,\psi\,\sin\,z,$$
$$(\widetilde{\mathrm{grad}\varphi})_z = (\mathrm{grad}\varphi)^z\sqrt{g_{zz}} = (\mathrm{grad}\varphi)_z/\sqrt{g_{zz}} =$$
$$= r\,(1 - 3\,\cos^2\psi)\,\cos\,z.$$

Упражнение 9.3. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{A}$, заданного в псевдоцилиндрических координатах (см. упражнение 9.1.) физическими компонентами $\widetilde{A}_r = r^2\sqrt{a^2+b^2}\,\sin\psi$, $\widetilde{A}_\psi = -r^2\sqrt{a^2+b^2}\,\cos\psi$, $\widetilde{A}_z = r^2$.

Решение. Дивергенция векторного поля определяется дифференцированием контравариантных компонент поля A^α, выразим их через физические компоненты. Учитывая ортогональность псевдоцилиндрических координат, получим:

$$A^r = \widetilde{A}_r/\sqrt{g_{rr}} = r^2\,\sin\psi,$$
$$A^\psi = \widetilde{A}_\psi/\sqrt{g_{\psi\psi}} = -r^2\,\cos\psi,$$
$$A_z = \widetilde{A}_z/\sqrt{g_{zz}} = r^2.$$

Вычисляя также $\sqrt{g} = r(a^2 + b^2)$, найдем по формуле (9.6) дивергенцию поля

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{g}A^r\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sqrt{g}A^\psi\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{g}A^z\right) =$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA^r\right) + \frac{\partial}{\partial \psi}\left(A^\psi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A^z\right) =$$
$$= 4r\,\sin\,\psi.$$

Ротор поля определяется дифференцированием ковариантных компонент поля. Вычисляя их по формулам перехода через полученные выше контравариантные компоненты с учетом диагональности метрического тензора

$$\begin{aligned} A_r &= A^r g_{rr} = r^2(a^2+b^2)\,\sin\,\psi,\\ A_\psi &= A^\psi g_{\psi\psi} = -r^3(a^2+b^2)\,\cos\,\psi,\\ A_z &= A^z g_{zz} = r^2, \end{aligned}$$

найдем ротор поля по формуле (9.7)

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r(a^2+b^2)}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\psi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \psi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ r^2(a^2+b^2)\sin\,\psi & -r^3(a^2+b^2)\cos\,\psi & r^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2}{a^2+b^2}\,\vec{e}_\psi\, -\, 4r\,\cos\,\psi\,\vec{e}_z.$$

В полученном выражении ротор представлен контравариантными компонентами

$$(\mathrm{rot}\vec{A})^r = 0, \quad (\mathrm{rot}\vec{A})^\psi = -\frac{2}{a^2+b^2}, \quad (\mathrm{rot}\vec{A})^z = -\,4r\,\cos\,\psi.$$

Физические компоненты ротора находятся через контравариантные

$$\widetilde{(\mathrm{rot}\vec{A})}_r = (\mathrm{rot}\vec{A})^r\sqrt{g_{rr}} = 0,$$

$$(\widetilde{\mathrm{rot}\vec{A}})_\psi = (\mathrm{rot}\vec{A})^\psi \sqrt{g_{\psi\psi}} = -\frac{2r}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$(\widetilde{\mathrm{rot}\vec{A}})_z = (\mathrm{rot}\vec{A})^z \sqrt{g_{zz}} = -3r\,\cos\,\psi.$$

Упражнение 9.4. Записать выражение для лапласиана скалярного поля в псевдоцилиндрических координатах (см. упражнение 9.1.).

Решение. Так как псевдоцилиндрические координаты ортогональны, лапласиан скалярного поля определяется по формуле (9.10). Определяя коэффициенты Ламе

$$H_r = \sqrt{g_{rr}} = \sqrt{a^2+b^2},\ H_\psi = \sqrt{g_{\psi\psi}} = r\sqrt{a^2+b^2},\ H_z = \sqrt{g_{zz}} = 1,$$

получим следующее представление лапласиана

$$\Delta\varphi \,=\, \frac{1}{a^2+b^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[(a^2+b^2)r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}\right] + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Упражнение 9.5. Вычислить физические компоненты лапласиана векторного поля $\vec{A}$, заданного в псевдоцилиндрических координатах (см. упражнение 9.1.) физическими компонентами: $\tilde{A}_r = \sqrt{a^2+b^2}\,r^n\,\sin\,\psi$, $\tilde{A}_\psi = \sqrt{a^2+b^2}\,r^n\,\cos\,\psi, \tilde{A}_z = 0$.

Решение. Выполним последовательно все дифференцирования в формуле (9.11) для $\Delta\vec{A}$, учитывая ортогональность псевдоцилиндрических координат.

а) Перейдем к контравариантным компонентам поля

$$A^r = \tilde{A}^r \big/ \sqrt{g_{rr}} = r^n\,\sin\,\psi,$$
$$A^\psi = \tilde{A}^\psi \big/ \sqrt{g_{\psi\psi}} = r^{n-1}\,\cos\,\psi,$$
$$A^z = \tilde{A}^z \big/ \sqrt{g_{zz}} = 0$$

и вычислим дивергенцию

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\partial r}\left(rA^r\right) + \frac{\partial A^\psi}{\partial\psi} + \frac{\partial A^z}{\partial z} =$$
$$= (n+1)r^{n-1}\,\sin\,\psi - r^{n-1}\,\sin\,\psi = nr^{n-1}\,\sin\,\psi.$$

б) Вычислим $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A}$

$$\left(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A}\right)_r = \frac{\partial}{\partial r}\mathrm{div}\vec{A} = n(n-1)\,r^{n-2}\,\sin\,\psi,$$
$$\left(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A}\right)_\psi = \frac{\partial}{\partial \psi}\mathrm{div}\vec{A} = n\,r^{n-1}\,\cos\,\psi,$$
$$\left(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A}\right)_z = \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\vec{A} = 0$$

и перейдем к физические компонентам градиента:

$$\left(\widetilde{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}}\vec{A}\right)_r = \left(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A}\right)_r \Big/ \sqrt{g_{rr}} = \frac{n(n-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}\,r^{n-2}\,\sin\,\psi,$$
$$\left(\widetilde{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}}\vec{A}\right)_\psi \left(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A}\right)_\psi \Big/ \sqrt{g_{\psi\psi}} = \frac{n}{\sqrt{a^2+b^2}}\,r^{n-2}\,\cos\,\psi,$$
$$\left(\widetilde{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}}\vec{A}\right)_z = \left(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A}\right) \Big/ \sqrt{g_{zz}} = 0.$$

в) Для вычисления ротора поля перейдем к ковариантным компонентам

$$A_r = \tilde{A}^r\,\sqrt{g_{rr}} = (a^2+b^2)\,r^n\,\sin\,\psi,$$
$$A_\psi = \tilde{A}^\psi\,\sqrt{g_{rr}} = (a^2+b^2)\,r^{n+1}\,\cos\,\psi,$$
$$A_z = \tilde{A}^z\,\sqrt{g_{zz}} = 0.$$

Вычислим ротор поля. Учитывая, что $A_z = 0$ а компененты A_r и A_ψ не зависят от z, получим

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\psi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \psi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & A_\psi & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\psi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \psi} & 0 \\ A_r & A_\psi & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{r(a^2+b^2)}\left(\frac{\partial A_\psi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \psi}\right)\vec{e}_z = n\,r^{n-1}\,\cos\,\psi\,\vec{e}_z.$$

Ротор поля представлен в ковариантном базисе контравариантной компонентой $\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)^z$:

$$\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)^z = n\,r^{n-1}\,\cos\,\psi, \quad \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)^r = 0, \quad \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)^\psi = 0.$$

г) Для повторного вычисления ротора необходимо перейти к ковариантным компонентам $\mathrm{rot}\vec{A}$

$$\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_r = 0, \quad \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_\psi = 0, \quad \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_z = \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)^z g_{zz} = n\,r^{n-1}\,\cos\,\psi.$$

Вычислим $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{r(a^2+b^2)}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\psi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \psi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & n\,r^{n-1}\,\cos\,\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r(a^2+b^2)}\left[-\vec{e}_r\,n\,r^{n-1}\,\sin\,\psi - \vec{e}_\psi\,n(n-1)\,r^{n-2}\,\cos\,\psi\right] =$$

$$= -\vec{e}_r\,\frac{n}{r(a^2+b^2)}\,r^{n-1}\,\sin\,\psi - \vec{e}_\psi\,\frac{n(n-1)}{r(a^2+b^2)}\,r^{n-2}\,\cos\,\psi.$$

и перейдем к физическим компонентам

$$\left(\widetilde{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}}\right)^r = \left(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}\right)^r\,\sqrt{g_{rr}} = -\frac{n}{\sqrt{a^2+b^2}}\,r^{n-2}\,\sin\,\psi,$$

$$\left(\widetilde{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}}\right)_\psi = \left(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}\right)^\psi\,\sqrt{g_{\psi\psi}} = -\frac{n(n-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}\,r^{n-2}\,\cos\,\psi,$$

$$\left(\widetilde{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}}\right)^z = \left(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}\right)^z\,\sqrt{g_{zz}} = 0.$$

д) Вычитая покомпонентно $\widetilde{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}}\vec{A}$ из $\widetilde{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}}\vec{A}$, найдем физические компоненты $\Delta\vec{A}$

$$\left(\widetilde{\Delta\vec{A}}\right)_z = \frac{n^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,r^{n-2}\,\sin\,\psi,$$

$$\left(\widetilde{\Delta\vec{A}}\right)_\psi = \frac{n^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,r^{n-2}\,\cos\,\psi,$$

$$\left(\widetilde{\Delta\vec{A}}\right)_z = 0.$$

Задачи

9.1 Доказать, что ковариантная производная $\vec{e}^{\,i}$ имеет вид
$\dfrac{\partial \vec{e}^{\,i}}{\partial x^j} = -\,\Gamma^i_{jk}\,\vec{e}^{\,k}.$

9.2 Доказать соотношение $\Gamma^\alpha_{\alpha k} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k} = \dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial g}{\partial x^k}.$

9.3 Выписать ненулевые компоненты символов Кристоффеля первого и второго рода для

a) цилиндрических координат;

b) сферических координат.

9.4 Доказать, что ковариантная производная векторного поля $\vec{A}$ в контравариантном базисе приводится к виду

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\,A_k\right)\vec{e}^{\,i}.$$

9.5 Вычислить в цилиндрических координатах физические компоненты градиента скалярного поля:

$$a)\,\varphi = r\,\cos\psi; \qquad b)\,\varphi = e^{\alpha z}\,r^n\,\cos(n\psi).$$

9.6 Вычислить в сферических координатах физические компоненты градиента скалярного поля:

$$a)\,\varphi = \frac{\cos(kr)\cos\theta}{r}; \qquad b)\,\varphi = \frac{1}{r^2}\,\left(3\cos^2\theta - 1\right)\sin(2\psi).$$

В задачах **9.7 – 8.9** вычислить дивергенцию и физические компоненты ротора векторного поля $\vec{A}$, заданного своими компонентами в цилиндрических координатах:

9.7$A_r = A_z = 0, \quad A_\psi = ar^2\left(R^2 - \dfrac{r^2}{2}\right).$

9.8$A^r = 0, \quad A^\psi = a, \quad A^z = b\left(R^2 - r^2\right).$

9.9$\tilde{A}_r = \rho\,(2r - R)\,\cos\,\psi, \quad \tilde{A}_\psi = \rho\,(R - r)\,\sin\,\psi, \quad \tilde{A}_z = 0.$

В задачах **9.10 – 9.12** вычислить дивергенцию и физические компоненты ротора векторного поля $\vec{A}$, заданного своими компонентами в сферических координатах:

9.10

$$A_r = a\left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right)\cos\,\theta,$$
$$A_\theta = ar\left(\frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3}\right)\sin\,\theta, \quad A_\psi = 0.$$

9.11 $A^r = b\,\dfrac{R^5}{r^3}\cos\,\theta, \quad A^\theta = b\,\dfrac{R^5}{r^4}\,\sin\,\theta, \quad A^\psi = 0.$

9.12 $\tilde{A}_r = 2r + a\,\cos\,\theta, \tilde{A}_\theta = -a\,\sin\,\theta, \tilde{A}_\psi = r\,\sin\,\theta.$

9.13 Убедиться в том, что векторное поле

$$\vec{A} = \frac{2\,\cos\,\theta}{r^3}\,\vec{i}_r + \frac{\sin\,\theta}{r^3}\,\vec{i}_\theta$$

является потенциальным.

9.14 Записать в цилиндрических координатах дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{A}$, заданного физическим компонентами.

9.15 Записать в сферических координатах дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{A}$, заданного физическим компонентами.

9.16 Записать Лапласиан скалярного поля, заданного в цилиндрических координатах.

9.17 Записать Лапласиан скалярного поля, заданного в сферических координатах.

9.18 Вычислить лапласиан скалярного поля, заданного в цилиндрических координатах:

$$a)\,\varphi \;=\; a(3R - 2r)\,r\,cos\,\psi; \qquad b)\,\varphi \;=\; \frac{aR^3}{r}\,cos\,\psi;$$
$$c)\,\varphi \;=\; r^n\sin(n\psi)\,\cos(kz); \qquad d)\,\varphi \;=\; \sin^n\psi\,\cos(kz).$$

9.19 Вычислить лапласиан скалярного поля, заданного в цилиндрических координатах:

$$\varphi = R^2\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos\,n\psi.$$

9.20 Вычислить лапласиан скалярного поля, заданного в сферических координатах:

$$a)\,\varphi\;=\;\frac{a}{r^3}\,\left(3\,cos^2\,\theta-1\right);\qquad b)\,\varphi\;=\;ar^2\,\cos\theta\,\sin\theta\sin\,\psi;$$
$$c)\,\varphi\;=\;\frac{1}{r}\,\sin^2\theta\,\cos(2\psi);\qquad d)\,\varphi\;=\;\frac{1}{r^4}\,sin^2\theta\,cos\theta\,\sin(3\psi).$$

9.21 Вычислить физические компоненты лапласиана векторного поля $\vec{B}=\Delta\vec{A}$, заданного в цилиндрических кординатах:

$$a)\quad \tilde{A}_r=\tilde{A}_z=0,\quad \tilde{A}_\psi=\frac{a}{r};$$
$$b)\quad \tilde{A}_r=\tilde{A}_z=0,\quad \tilde{A}_\psi=ar\left(R^2-\frac{r^2}{2}\right).$$

9.22 Вычислить физические компоненты лапласиана векторного поля $\vec{B}=\Delta\vec{A}$, заданного в цилиндрических кординатах:

$$\vec{A}=\vec{e}_zR^2\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\left(\frac{R}{r}\right)^n\cos\,n\psi.$$

9.23 Вычислить физические компоненты лапласиана векторного поля $\vec{B}=\Delta\vec{A}$, заданного в сферических кординатах:

$$a)\quad \tilde{A}_r=\tilde{A}_\theta=0,\quad \tilde{A}_\psi=\frac{a}{r^2}\,\sin\theta;$$
$$b)\quad \tilde{A}_r=\tilde{A}_\theta=0,\quad \tilde{A}_\psi=ar\left(\frac{R^2}{3}-\frac{r^2}{5}\right).$$

В задачах **9.24 – 9.25** построить метрический тензор и Лапласиан скалярной функции для криволинейных координат, определенных неявным образом через декартовы координаты.

9.24 Координаты σ,τ,ψ *вытянутого эллипсоида вращения*:

$$x=a\,\sqrt{(\sigma^2-1)\,(1-\tau^2)}\,\cos\,\psi,$$

$$y=a\,\sqrt{(\sigma^2-1)\,(1-\tau^2)}\,\sin\,\psi,$$

$$z = a\sigma\tau \qquad (-1 \leq \tau \leq 1 \leq \sigma \leq \infty,\ 0 \leq \psi < 2\pi).$$

9.25 *Параболические координаты* σ, τ, ψ :

$$x = \sigma\tau\ \cos\,\psi,\ y = \sigma\tau\ \sin\,\psi,\ z = \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tau^2)$$

$$(0 \leq \sigma, \tau \leq \infty, 0 \leq \psi < 2\pi).$$

Ответы

1.1 a) полупрямая: $x = 2, y = -z \quad (y > 0, z, 0)$;
b) Парабола, получаемая пересечения поверхностей:
$$y = x, \quad z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2);$$
c) эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$;
d) отрезок: $x + y = 1, z = 0 \quad (0 \le x, y \ge 1)$;
e) винтовая линия: $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ct$;
f) полупрямая: $x + y = 1, \quad x \ge 1/2$;
g) кардиоида: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$,
h) астроида: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, z = 0 \quad (0 \le |x|, |y| \le a)$;
i) декартов лист: $x^3 + y^3 = 3axy, z = 0$;
j) окружность, получаемая пересечением сферы
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$, и плоскости $x = y$;
k) линия пересечения поверхностей: $y = x^2/3, \quad z = x^3/9$;
l) парабола $(x - y)^2 - 2(x + y) + 4 = 0$.

1.2 Отрезок прямой.

1.3 Луч, если $\vec{r}_1 \ne 0$, и прямая , если $\vec{r}_1 = 0$.

1.4
$$a) \quad d\vec{r}(t)/dt = (-a\sin t, a\cos t, 0);$$
$$b) \quad d\vec{r}(t)/dt = (a\cos t, -a\sin t, 2bt);$$
$$c) \quad d\vec{r}(t)/dt = \omega\vec{a}\,e^{\omega t} + \omega\vec{b}\,e^{-\omega t}.$$

1.6 $a)\ 2\vec{r}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}; \quad b)\ \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 + \vec{r}\cdot\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}; \quad c)\ \vec{a}\times\dfrac{d\vec{r}}{dt}; \quad d)\ \vec{r}\times\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$

1.8
$$a) \quad x = \sqrt{2}\,(1 + s),\ y = 1 + 2s,\ z = \pi/4 + s;$$
$$b) \quad x = e(1 + s),\ y = e^{-1}(1 - s),\ z = 1 + 2s;$$
$$c) \quad x = 1 + s,\ y = s,\ z = 1 + s.$$

1.9 $x = a(\pi/2 - 1 + s),\ y = a(1 + s),\ z = a\sqrt{2}(2 + s); \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{4}.$

1.10 $O(1, 0, 3)$.

1.11 Касательная прямая: $x = 2, y = 2s, z = 4s$;
нормальная плоскость: $y + 2z = 0$.

1.12 Касательная прямая: $x = 1 + s, y = 1 + 2s, z = 1 + 3s$;
нормальная плоскость: $x + 2y + 3z - 6 = 0$;
В пересечении касательных с плоскостью xy
получается парабола: $y = 3/4x^2$.

1.14 Касательные кривые в точках на уровне $z = z_0$:

$$x = \pm\sqrt{2az_0}\left(1 + s/\sqrt{2az_0}\right), y = \pm\sqrt{2bz_0}\left(1 + s/\sqrt{2bz_0}\right), z = z_0 + s;$$

нормальные плоскости в тех же точках:

$$\sqrt{a}(x \mp \sqrt{2az_0}) + \sqrt{b}(y \mp \sqrt{2bz_0}) \pm \sqrt{z_0}(z - z_0) = 0.$$

1.15 $a) M_1(0, 3),\ M_2(0, -3),\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4.$

$b) M_k\left(\pi/4 + k\pi, (-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\alpha_k = \arccos 1/3$, где k - целое число.

1.17

$$a) \int \vec{r}(t)dt = \vec{i}\sin t - \vec{j}\,e^{-t} + \vec{k}\,t + \vec{c};$$

$$b) \int \vec{r}(t)dt = \vec{i}(-t\cos t + \sin t) + \vec{j}\,t + \vec{k}\,\left(te^t - e^t\right) + \vec{c};$$

$$c) \int \vec{r}(t)dt = \vec{i}\sin t - \vec{j}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right) + \vec{c},$$

$$d) \int \vec{r}(t)dt = \vec{i}\,(t-1)e^t - \vec{j}\frac{1}{2}\ln^2 t + \vec{k}\,t(\ln t - 1). + \vec{c}$$

2.1 a) прямые $2x - y = c$; b) гиперболы $x^2 - y^2 = c$;
c) прямые , $y = 2e^c x$;
d) параболы с осями, параллельными оси y, проходящими через точку (0,1) и касающиеся в этой точке прямой $2x - y + 1 = 0$, и сама эта прямая,
e) гипербола $\dfrac{4}{c^4}x^2 - \dfrac{4}{c^2}y^2 = 1$.

2.2 Семейство параллельных плоскостей (a, b) :
$a)\, x + 2y + 3z = c$; $b)\, a_1x + a_2y + a_3z = \ln c$;

семейство концентрических сфер (c, d) :
$c)\, x^2 + y^2 + z^2 = c^2$; $, d)\, x^2 + y^2 + z^2 = e^c$;

e) семейство круговых конусов

$z^2 = (x^2 + y^2)\sin^2 c$.

2.3 Эллипсоиды вращения с осью z:

$$x^2+y^2+\frac{c^2-256}{c^2}z^2=\frac{c^2-256}{4} \qquad (c\geq 16).$$

2.4 Сферы с центром в начале координат.

2.5 Сфера $x^2+y^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$.

3.1

$a)$ $\operatorname{grad}\varphi=(1\ -2,\ 3)$;

$b)$ $\operatorname{grad}\varphi=\vec{i}\,(y+z)+\vec{j}\,(x+z)+\vec{k}\,(y+x)$;

$c)$ $\operatorname{grad}\varphi=\vec{i}\,(2x^2+1)e^{x^2+y^2+z^2}+\vec{j}\,2yxe^{x^2+y^2+z^2}+$
$+\vec{k}2xze^{x^2+y^2+z^2}$;

$d)$ $\operatorname{grad}\varphi=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},\ -\dfrac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)$;

$e)$ $\operatorname{grad}\varphi=\dfrac{2\vec{r}}{r^2}$;

$f)$ $\operatorname{grad}\varphi=(2x-y-z,4y+z-x,6z-x+y)$;

$g)$ $\operatorname{grad}\varphi=e^{x+y+z}[yz(x+1)\vec{i}+xz(y+1)\vec{j}+xy(z+1)\vec{k}]$;

$h)$ $\operatorname{grad}\varphi=\left(\dfrac{1}{1+x^2},\dfrac{1}{1+y^2},\dfrac{1}{1+z^2}\right)$.

3.2

$a)$ $(\operatorname{grad}\varphi)_A=2\vec{i}-7\vec{k}$, $\quad |\operatorname{grad}\varphi|=\sqrt{53}$;

$b)$ $(\operatorname{grad}\varphi)_B=6\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k}$, $\quad |\operatorname{grad}\varphi|=\sqrt{126}$;

$c)$ $(\operatorname{grad}\varphi)_C=(6,\ 2,\ 3)$, $\quad |\operatorname{grad}\varphi|=7$;

$O(-8/7,2/7,7/10)$.

3.3

$$\operatorname{grad}\varphi=(12,\ -9,\ -20),\qquad |\operatorname{grad}\varphi|=25;$$

$$\cos\alpha=\frac{12}{25},\quad \cos\beta=-\frac{9}{25},\quad \cos\gamma=-\frac{4}{5};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

3.4 $a)\ xy=z^2$, b) не существуют $c)\ x=y=z$.

3.5 Сфера с центром в т. $O(a,b,c)$ и радиусом $r=1$.

3.6 Сфера с центром в начале координат и радиусом $r=1$.

3.7 $\cos\alpha=3/\sqrt{10}$. **3.8** $\cos\beta=-8/9$.

3.9 $\beta = 0$. **3.10** $\alpha = \pi/2$.

3.11 Плоскость $x + y = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

3.12 $a)\, \dfrac{\vec{r}}{r}; \quad b)\, \dfrac{\vec{r}}{r^2}; \quad c)\, -\dfrac{e\vec{r}}{r^3}, \quad d)\, \vec{a}; \quad e)\, 2\vec{r}; \quad f)\, 2\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{a}) - 2\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{r})$.

3.14 $\operatorname{grad}\varphi(r)\cdot\vec{r} = \varphi'(r)r$.

3.15 0. **3.16** $\vec{r}/r$.

3.17

$$a) \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{154}}(3\vec{i} + 12\vec{j} - \vec{k}) = \left(\frac{3}{\sqrt{154}}, \frac{12}{\sqrt{154}}, \frac{-1}{\sqrt{154}}\right);$$

$$b) \quad \vec{n} = \frac{1}{13}(3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}) = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right);$$

$$c) \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{22}}(3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = \left(\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}\right).$$

3.18 $\cos\beta = \dfrac{c_2}{\sqrt{3c_1}}$. **3.19** $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l} = \dfrac{2\varphi}{r}$.

3.20 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l} = -\dfrac{\cos(\vec{l}, \vec{r})}{r^2}; \dfrac{\partial\varphi}{\partial l} = 0, \qquad \vec{l} \perp \vec{r}$.

3.21 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l} = \dfrac{1}{r^2}$. **3.22** $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l} = 1$.

3.23 $$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi}{|\operatorname{grad}\psi|}.$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = 0, \qquad \operatorname{grad}\varphi\perp\operatorname{grad}\psi.$$

3.24 a) $|\text{grad}\varphi| = 1$, в направлении оси y;
b) $|\text{grad}\varphi| = 3$, в направлении вектора $\vec{a} = (-1,\ -2,\ 2)$;
c) $|\text{grad}\varphi| = 1$, в направлении оси x.

3.25 $a)\ (0,0), (1,1)$; $b)\ (7,2,1)$.

4.1 $a)\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z} = dt$; интегрируя эти уравнения, получим параметрическое представление векторных линий в виде прямых, проходящих через начало координат:
$x = c_1 t,\ y = c_2 t,\ z = c_3 t$;
b) прямые, имеющие направление вектора $(m_1,\ m_2,\ m_3)$;
c) окружности при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2$,
и плоскости $x + y + z = c_2$;
d) параметрическое уравнение линии, проходящие через точку (x_0, y_0, z_0) имеет вид:
$x(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t},\ y(t) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 t},\ z(t) = \dfrac{z_0}{1 - z_0 t}$;
e) Векторные линии являются окружностями пересечения плоскостей $\vec{c}\cdot\vec{r} = const$ со сферами $r^2 = const$.

4.2 $x = -\ln(e + t),\ y = l(1 + t),\ z = e^t$.

4.3 Линия пересечения поверхностей $x^2 - y^2 = 3$ и $y - z = 1$.

5.1 $a)\operatorname{div}\vec{A} = yz + 3 + 2z,\ b)\operatorname{div}\vec{A} = 12xy^2 + 4x^3 + -6xz$.

5.2 $(\operatorname{div}\vec{a})_M = \dfrac{18}{125}$. **5.3** $\dfrac{x+y+z}{xyz}$. **5.4** $a)0;\ b)0$.

5.7 $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = f''(r) + \dfrac{2}{r}f'(r)$.

5.8 $a)\ 3;\ b)\ \dfrac{2}{r};\ c)\ \dfrac{1}{r}(\vec{c}\cdot\vec{r});\ d)\ \dfrac{f'(r)}{r}(\vec{c}\cdot\vec{r});\ e)\ 3f(r) + rf'(r)$.

5.10 $\operatorname{div}\vec{v} = 0,\quad \operatorname{div}\vec{w} = -2\omega^2$. **5.11** $\operatorname{rot}\vec{v} = 2\omega\vec{l}$.

5.12 $(\operatorname{rot}\vec{a})_M = (-5/4,\ -1,\ 5/2);\ |(\operatorname{rot}\vec{a})_M| = \sqrt{141}/4$.

5.13 $a)\,0, \quad b)\,\dfrac{1}{r}(\vec{r}\times\vec{c}), \quad c)\,\dfrac{f'(r)}{r}[\vec{r}\times\vec{c}], \quad d)\,0, \quad e)\,\vec{a}\times\vec{c}.$

5.15 $\vec{a}\big/|\vec{a}|.$

5.16 $(2xa_x,\, 2ya_y,\, 2za_z)\big/|\vec{a}| \,=\, 2\vec{r}\cdot\vec{a}\big/|\vec{a}|.$

5.21 $(\vec{a}\cdot\vec{c})V$, где V - объем, ограниченный поверхностью S.

5.22 $\operatorname{div}\vec{A} = 3(x^2+y^2+z^2$, по формуле Остроградского- Гаусса

$$\Pi = \iint\limits_S \vec{A}\vec{n}\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{A}\,dV = 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dV.$$

Перейдем к сферическим координатам

$$x = r\,\sin\,\theta\,\cos\,\psi, \quad y = r\,\sin\,\theta\,\sin\,\psi, \quad z = r\,\cos\,\theta;$$
$$r\in[0,\infty), \quad \theta\in[0,\pi], \quad \psi\in[0,2\pi).$$

Записывая в объемном интеграле дифференциал объема в сферических координатах

$$dV = r^2\,\sin\,\theta\,dr\,d\theta\,d\psi$$

и интегрируя по указанным пределам изменения сферических координат, получим следующее значение потока

$$\Pi = 3\int\limits_0^R r^4\,dr\int\limits_0^\pi \sin\,\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\psi \,=\, \frac{12}{5}\,\pi R^5.$$

5.23 $4\pi q.$ **5.24** $0.$ **5.25** $a)\,2\pi; \quad b)\,2\pi.$ **5.26** $2\pi a_z.$

5.27 $u = -xyz(x+y+z)+const.$

5.29 а) Не имеет, с) поле потенциальное - $u = -xyz(x+y+z)+c.$

6.3 $a)\,4(\vec{a}\cdot\vec{r});\ b)\,\vec{a}\cdot\vec{c};\ c)\,-2(\vec{a}\cdot\vec{c}); d\,-2(\vec{a}\cdot\vec{r}),\ e)\,\vec{c}\times\vec{r};\ f)\,\vec{a}\times\vec{c};$
$g)\,-\vec{a}\times\vec{c},\ h)\,3\vec{c}\times\vec{r}.$

6.4 $(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}).$

6.5 $a)\ \vec{E}=\vec{a}\times\vec{b};$

$b)\ \vec{E}=(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{b}-2(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{r}+(\vec{b}\cdot\vec{r})\vec{a};$

$c)\ \vec{E}=(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{b}\ \sin\ \vec{b}\cdot\vec{r}-\vec{a}\ \cos\ \vec{b}\cdot\vec{r};$

$$d)\ \vec{E}=\frac{3\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r})-\vec{a}\,r^2}{r^5};$$

$$e)\ \vec{E}=-\frac{dF}{df}\frac{df}{d(\vec{a}\cdot\vec{r})}\vec{a}.$$

6.6 $a)\ \operatorname{div}A=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{r}),\quad \operatorname{rot}\vec{A}=3(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{r};$

$$b)\ \operatorname{div}\vec{A}=0,\quad \operatorname{rot}\vec{A}=-2\vec{f}+\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{f}')}{r};$$

$c)\ \operatorname{div}\vec{A}=e^{(\vec{r}\times\vec{a})\cdot\vec{b}}(3+(\vec{a}\times\vec{b})\vec{r}),$

$\operatorname{rot}\vec{A}=e^{(\vec{r}\times\vec{a})\cdot\vec{b}}[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}];$

$$d)\ \operatorname{div}\vec{A}=0,\quad \operatorname{rot}\vec{A}=\frac{3\vec{r}(\vec{a}\vec{r})-\vec{a}r^2}{r^5};$$

$$e)\ \operatorname{div}\vec{A}=\vec{a}\vec{f}+\frac{\vec{r}\vec{f}\,'}{r}(\vec{a}\vec{r}),\quad \operatorname{rot}\vec{A}=\vec{a}\times\vec{f}+\frac{\vec{r}\times\vec{f}\,'}{r}(\vec{a}\vec{r});$$

$f)\ \operatorname{div}\vec{A}=\vec{a}\cdot\vec{b}\ \cos(\vec{c}\cdot\vec{r})-(\vec{b}\cdot\vec{r})(\vec{a}\cdot\vec{c})\sin(\vec{c}\cdot\vec{r}),$

$\operatorname{rot}\vec{A}=\vec{b}\times\vec{a}\ \cos(\vec{c}\cdot\vec{r})-\vec{c}\times\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{r})\sin(\vec{c}\cdot\vec{r}).$

$$g)\ \operatorname{div}\vec{A}=-\alpha\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r}e^{-\alpha r},\qquad \operatorname{rot}\vec{A}=\alpha\frac{\vec{a}\times\cdot\vec{r}}{r}e^{-\alpha r},$$

$$h)\ \operatorname{div}\vec{A}=\frac{2+2\alpha r-\alpha^2r^2}{r}e^{-\alpha r}\qquad \operatorname{rot}\vec{A}=0.$$

6.7 $a)\ n(3-n)\frac{\vec{r}}{r^{n+2}};\quad b)\ 0;\quad c)\ 0.$ **6.8** $0.$

6.9 $-n(n-3)\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^{n+2}}.$

6.10 $\operatorname{div}\vec{A}=0;\ \operatorname{rot}\vec{A}=0.$

6.11 $\frac{\vec{f}}{r}-\frac{(\vec{f}\vec{r})\vec{r}}{r^3}+\vec{f}'-\frac{(\vec{f}'\vec{r})\vec{r}}{r^2}.$

6.12. $c)-(n-3)(n-2)\frac{\vec{d}\vec{r}}{r^{n+2}};\quad d)n(n-3)\frac{\vec{r}\times\vec{m}}{r^{n+2}}.$

7.1. $a)\ 0,\ \ b)\ 0,\ \ c)\ 0,\ \ d)\ \ -\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right),\ \ e)\ 0.$

7.2 $a)\,\varphi\Delta\varphi+(\mathrm{grad}\varphi)^2;\ \ b)\,\varphi\Delta\psi+\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\psi.$

7.3. $a)\,(6xy,6yz,6zx),\quad b)\ \left(2\dfrac{x}{y^3},2\dfrac{y}{z^3},2\dfrac{z}{x^3},\right),\quad c)\,0.$

7.4. $a)\ n(n-1)\dfrac{1}{r^{n+2}},\quad b)\,n(n-3)\dfrac{\vec{d}\vec{r}}{r^{n+2}},$

$c)\,f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r),\quad d)\,\dfrac{4}{Rr}-\dfrac{3}{R^2}.$

7.5. $a)\,0,\quad b)\,n(n-3)\dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^{n+2}},\quad c)\,n(n-3)\dfrac{\vec{r}}{r^{n+2}},$

$d)\,\vec{f}''(r)+2\dfrac{\vec{f}'(r)}{r},\quad e)\ [f''(r)+4f'(r)]\ (\vec{m}\times\vec{r}).$

8.1 $a)\vec{e}^{\,1}=(a,0,0),\qquad \vec{e}^{\,2}=(0,b,0),\qquad \vec{e}^{\,3}=(0,0,c);$

$\vec{e}_1=(1/a,0,0),\qquad \vec{e}_2=(0,1/b,0),\qquad \vec{e}_3=(0,0,1/c);$

$b)\vec{e}^{\,1}=(1,1,0),\qquad \vec{e}^{\,2}=(1,-1,0),\qquad \vec{e}^{\,3}=(0,0,2),$

$\vec{e}_1=(1/2,1/2,0),\qquad \vec{e}_2=(1/2,-1/2,0),\qquad \vec{e}_3=(0,0,1/2)$

$c)\vec{e}^{\,1}=(y,x,0),\qquad \vec{e}^{\,2}=(1/y,-x/y^2,0),\qquad \vec{e}^{\,3}=(0,0,3z^2);$

$\vec{e}_1=(1/2y,1/2x,0),\qquad \vec{e}_2=(1/2y,-y^2/2x,0),\qquad \vec{e}_3=(0,0,1/3z^2).$

8.5 нет, нет.

8.6

$$\vec{e}^{\,\sigma}=\left(\frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2}\ \cos\,\theta,\ \frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2}\ \sin\,\theta,\ -\frac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2}\right),$$

$$\vec{e}^{\,\tau}=\left(\frac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2}\ \cos\,\theta,\ \frac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2}\ \sin\,\theta,\ \frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2}\right),$$

$$\vec{e}^{\,\theta}=\left(-\frac{1}{\sigma\tau}\ \sin\,\theta,\ \frac{1}{\sigma\tau}\ \cos\,\theta,\ 0\right).$$

8.7
$$\vec{e}_u = \left(\frac{sh\,u\,\cos\,v}{a\left(sh^2-\sin^2\,v\right)},\,\frac{ch\,u\,\sin\,v}{a\left(sh^2-\sin^2\,v\right)},\,0\right),$$
$$\vec{e}_v = \left(-\frac{ch\,u\,\sin\,v}{a\left(sh^2\,u-\sin^2\,v\right)},\,\frac{sh\,u\,\cos\,v}{a\left(sh^2\,u-\sin^2\,v\right)},\,0\right),$$
$$\vec{e}_z = (0,\,0,\,1)\,.$$

8.9 *a)* $\vec{e}_r = (\cos\,\psi,\,\sin\,\psi, 0)$, $\vec{e}_\psi = (-r\,\sin\,\psi,\,r\,\cos\,\psi,\,0)$,
$\vec{e}_z = (0,\,0,\,1)$;
$\vec{e}^{\,r} = (\cos\,\psi,\,\sin\,\psi, 0)$, $\vec{e}^{\,\psi} = (-\sin\,\psi/r, \cos\,\psi/r,\,0)\,,$
$\vec{e}^{\,z} = (0,\,0,\,1)$;

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{g}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

b) $\vec{e}_r(\sin\theta\,\cos\psi,\,\sin\theta\;\;\sin\psi,\,\cos\theta)$,
$\vec{e}_\theta\,(r\,\cos\theta\,\cos\psi,\,r\,\cos\theta\;\;\sin\psi,\,-r\,\sin\theta)\,,$
$\vec{e}_\psi\,(-r\,\sin\theta\,\sin,\psi,\,r\,\sin\theta\,\cos\psi,\,0)\,;$

$\vec{e}^{\,r}(\sin\theta\,\cos\psi,\,\sin\theta\;\;\sin\psi,\,\cos\theta)$,
$$\vec{e}^{\,\theta}\left(\frac{1}{r}\cos\theta\,\cos\psi,\,\frac{1}{r}\,\cos\theta\;\;\sin\,\psi,\,-\frac{1}{r}\,\sin\theta\right),$$
$$\vec{e}^{\,\psi}\left(-\frac{1}{r}\frac{\sin\psi}{\sin\theta},\frac{1}{r}\frac{\cos\psi}{\sin\theta},\,0\right);$$

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad \hat{g}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\,\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

8.10 $\hat{A}_r = A_x\,\cos\psi + A_y\,\sin\psi,$
$\hat{A}_\psi = -A_x\,\sin\,\psi + A_y\;\;\cos\,\psi,\;\;\hat{A}_z = A_z.$

8.11 $\hat{A}_r = A_x \sin\theta \cos\psi + A_y \sin\theta \ \sin\psi + A_z \cos\theta,$

$\hat{A}_\theta = A_x \cos\theta \cos\psi + A_y \cos\theta \ \sin\psi - A_z \sin\theta,$

$\hat{A}_\psi = -A_x \sin\psi + A_y \cos\psi.$

8.12 *a)* $(d\vec{r})^2 = dr^2 + r^2\, d\psi^2 + dz^2,$

b) $(d\vec{r})^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin\theta^2\, d\psi^2.$

9.3 *a)* $\Gamma_{\psi\psi,r} = -r, \quad \Gamma_{r\psi,\psi} = \Gamma_{\psi r,\psi} = r;$

b) $\Gamma_{\theta\theta,r} = -r, \quad \Gamma_{r\theta,\theta} = \Gamma_{\theta r,\theta} = r, \quad \Gamma_{\psi\psi,r} = -r \sin^2\theta;$

$\Gamma_{r\psi,\psi} = \Gamma_{\psi r,\psi} = r \sin^2\theta, \quad \Gamma_{\psi\psi,\theta} = -r^2 \sin\theta \cos\theta,$

$\Gamma_{\psi\theta,\psi} = \Gamma_{\theta\psi,\psi} = r^2 \sin\theta \cos\theta.$

9.5 *a)* $(\cos\psi, -\sin\psi, 0);$

b) $(ne^{az}\, r^{n-1} \cos(n\psi),\ -ne^{az}\, r^{n-1} \sin(n\psi),$
$ae^{az}\, r^n \cos(n\psi)).$

9.6 *a)* $\left(-\left(\frac{\cos kr}{r^2} + \frac{k \sin kr}{r}\right) \cos\theta,\ -\frac{\cos kr}{r^2} \sin\theta,\ 0\right);$

b) $\left(-\frac{2}{r}(3\cos^2\theta - 1)\sin 2\psi, -\frac{3}{r^3}\sin 2\theta \sin 2\psi,\right.$
$\left.\frac{2}{r^3 \sin\theta}(3\cos^2\theta \cos 2\psi)\right).$

9.7 $\mathrm{div}\vec{A} = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{A} = 2a\left(R^2 - r^2\right)\vec{i}_z.$

9.8 $\mathrm{div}\vec{A} = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{A} = -2ar^2\,\vec{i}_\psi - 2br\,\vec{i}_z.$

9.9 $\mathrm{div}\vec{A} = 3\rho \cos\psi, \quad \mathrm{rot}\vec{A} = 0.$

9.10 $\mathrm{div}\vec{A} = 0 \quad \mathrm{rot}\vec{A} = ar \sin\theta\,\vec{i}_\psi.$

9.11 $\mathrm{div}\vec{A} = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{A} = -\frac{bR^5}{r^4} \sin\theta\,\vec{i}_\psi.$

9.12 $\mathrm{div}\vec{A} = 6 \quad \mathrm{rot}\vec{A} = 2\,\vec{i}_r \cos\theta - 2\sin\theta\,\theta\,\vec{i}_\psi.$

9.14
$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\hat{A}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\hat{A}_\psi}{\partial\psi} + \frac{\partial\hat{A}_z}{\partial z};$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{A}_z}{\partial\psi} - \frac{\partial\hat{A}_\psi}{\partial z}\right)\vec{i}_r + \left(\frac{\partial\hat{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial\hat{A}_z}{\partial r}\right)\vec{i}_\psi +$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\hat{A}_\psi)}{\partial r} - \frac{\partial\hat{A}_r}{\partial\psi}\right]\vec{i}_z.$$

9.15 $\mathrm{div}\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2\hat{A}_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\,\sin\,\theta}\dfrac{\partial\hat{A}_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\,\sin\,\theta}\dfrac{\partial\hat{A}_\psi}{\partial\psi};$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\hat{A}_\psi\,\sin\,\theta\right) - \frac{\partial\hat{A}_\theta}{\partial\psi}\right]\vec{i}_r +$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\,\theta}\frac{\partial\hat{A}_r}{\partial\psi} - \frac{\partial(r\hat{A}_\psi)}{\partial r}\right]\vec{i}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\hat{A}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial\hat{A}_r}{\partial\theta}\right]\vec{i}_\psi.$$

9.16 $\Delta\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$

9.17
$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\,\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\,\theta}\right) +$$
$$+\frac{1}{r^2\,\sin^2\,\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}.$$

9.18 $a)\Delta\varphi = -6a\cos\psi,\quad b)\ \Delta\varphi = 0,$

$$c)\Delta\varphi = -r^n k^2\,\sin(n\psi)\,\cos(kz),$$

$$d)\Delta\varphi = \frac{\sin^n\psi\,\cos(kz)\left[n^2\,\cos^2\psi - n - k^2r^2(1-\cos^2\psi)\right]}{r^2\,\sin^2\psi(1-\cos^2\psi)}.$$

9.19 $\Delta\varphi = -4\left(\dfrac{r}{R}\right)^n\,\cos\,n\psi.$

9.20 $a)\ \Delta\varphi = 0,\qquad b)\ \Delta\varphi = 0,$

$$c)\ \Delta\varphi = -\frac{6}{r^3}\cos 2\psi\,\sin^2\theta,\qquad d)\ \Delta\varphi = -5\frac{\cos\theta\,\sin 3\psi}{r^6}.$$

9.21 $a)\tilde{B}_r = \tilde{B}_z = \tilde{B}_\psi = 0,\quad b)\tilde{B}_r = \tilde{B}_z = 0,\ \tilde{B}_\psi = -4ar.$

9.22 $\vec{A} = -4\,\vec{e}_z\left(\dfrac{R}{r}\right)^n\,\cos\,n\psi.$

9.23 $a)\tilde{B}_r = \tilde{B}_\theta = \tilde{B}_\psi = 0,\quad b)\tilde{B}_r = \tilde{B}_\theta = 0,\ \tilde{B}_\psi = -2r\sin\theta.$

9.24
$$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = a^2\,\frac{\sigma^2-\tau^2}{\sigma^2-1},\quad g_{\tau\tau} = a^2\,\frac{\sigma^2-\tau^2}{1-\tau^2},$$
$$g_{\psi\psi} = a^2\left(\sigma^2-1\right)\left(1-\tau^2\right);$$

$$\Delta\varphi \,=\, \frac{1}{a^2\left(\sigma^2-\tau^2\right)}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\left(\sigma^2-1\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left(1-\tau^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)+\,\frac{\sigma^2-\tau^2}{\left(\sigma^2-1\right)\left(1-\tau^2\right)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}\right].$$

9.25 $g_{\sigma\sigma} \,=\, g_{\tau\tau} \,=\sigma^2+\tau^2,\; g_{\psi\psi}=\sigma^2\tau^2;$

$$\Delta\varphi \,=\, \frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)+\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau\,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}\right].$$

Рекомендуемая литература

1. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля.М.:"Наука 1968, 128с.

2. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.:ОНТИ ГТТИ, 1954,456с.

3. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.:"Высшая школа 1963, 262с.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.:"Наука 1974г., 831с.