

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования**

**«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Факультет механико-математический**

**«Утверждаю»**

**Проректор по учебной работе**

**Гарькин В.П. \_\_\_\_\_**

**«\_\_» \_\_\_\_\_ 2013г.**

## **ПРОГРАММА ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА**

для обучающихся по направлению подготовки 010800.68 **МЕХАНИКА И  
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
(магистерская программа «Механика деформируемых тел и сред»)

**Самара  
2013**

## **Краткая аннотация программы**

Цель программы – сформировать у лиц, способных и желающих приобрести высшую квалификацию в области механики деформируемого твердого тела и математического моделирования, запас знаний, достаточный для быстрой и квалифицированной переработки фундаментальных теоретических исследований и получения новых результатов в процессе практической работы над теми или иными проблемами современной механики деформируемого твердого тела и математического моделирования. Программа ориентирована на уровень, подготовки, соответствующий механико-математическому факультету классического университета, и следует традициям преподавания всего комплекса математических дисциплин, сложившимся в российских университетах. Программа соответствует современным требованиям, предъявляемым к специалистам высшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела и учитывает более чем сорокалетний опыт, накопленный механико-математическим факультетом Самарского государственного университета. Обучаясь в магистратуре по направлению МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ И СРЕД, магистранты

- осваивают как классические (теория упругости и пластичности, теория вязкоупругости и ползучести, механика разрушения и численные методы в механике), так и новые разделы современной механики деформируемого твердого тела (метод конечных элементов и его реализация в программных комплексах Simulia Abaqus и Ansys, обратные задачи в механике деформируемых тел и сред, наномеханика и наноструктурированные материалы, компьютерное моделирование в механике);

- слушают лекции ведущих специалистов механико-математического факультета Самарского государственного университета, Самарского аэрокосмического университета, Самарского технического университета и представителей организаций – работодателей;

- используют современные информационные коммуникационные технологии в обучении;

- приобретают опыт в работе с передовыми вычислительными комплексами, реализующими метод конечного элемента (ANSYS, ABACUS), и широко используемыми на промышленных предприятиях Самары (ЦСКБ-Прогресс, АвтоВаз, НИПИНефть и др.), ведете компьютерное моделирование различных процессов с применением новейшего программного обеспечения (Mathematica, Maxima);

- в течение трех семестров изучают иностранный язык (как общую лексику, так и иностранный язык в сфере профессиональной коммуникации);

- получают содействие в трудоустройстве на ведущие предприятия Самары (ЦСКБ-Прогресс, АвтоВаз, НИПИНефть и др.);

- имеют возможность пройти научную стажировку в ведущих учебных заведениях России и Европы (L’Institute of Technology (Stockholm, Sweden)), Ecole Polytechnique (Paris, France);

- работают на кафедре математического моделирования в механике в рамках грантов Российского фонда фундаментальных исследований.

**Научный руководитель программы**

**Степанова Л.В.**

**Составитель программы**

**Степанова Л.В.**

## **РАЗДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ СПЛОШНЫХ СРЕД**

### **Тема 1. Элементы тензорного анализа**

Криволинейные координаты. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Понятие о тензоре. Метрический тензор. Дискриминантный тензор. Алгебра тензоров. Простейшие свойства тензоров. Дифференцирование координатных тензоров. Символы Кристоффеля. Ковариантное дифференцирование. Свойства ковариантного дифференцирования. Основные дифференциальные и интегральные операции. Ортогональные координаты. Физические компоненты тензоров (векторов). Симметричный тензор второго ранга. Главные направления, главные значения и инварианты.

### **Тема 2. Общие соотношения механики сплошных сред**

Пространственные и материальные координаты. Закон движения сплошной среды. Поле вектора скорости и поле вектора ускорения сплошной среды. Описание движения сплошной среды методом Лагранжа и методом Эйлера. Эквивалентность обоих подходов. Движение частицы сплошной среды. Тензоры деформации. Инварианты деформации. Главные значения и главные оси деформации. Условия совместности (сплошности) деформации. Геометрически линейная механика (теория деформаций). Мгновенное состояние движения сплошной среды. Тензор скорости деформаций. Распределение скоростей в жидкой частице. Объемные и поверхностные силы. Вектор и тензор напряжений. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности. Уравнение движения сплошной среды. Закон изменения количества движения и закон изменения момента количества движения. Теорема о кинетической энергии. Понятие об определяющих уравнениях. Простейшие классические среды.

## **РАЗДЕЛ 2. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

### **Тема 1. Теория упругости**

Обобщенный закон Гука. Закон Гука для изотропного однородного тела. Упругие постоянные и связь между ними. Формула Клайперона и формула Кастильяно. Формула Бетти. Основные уравнения и задачи теории упругости. Основные уравнения статики упругого тела. Прямая и обратная задача теории упругости. Уравнения упругого равновесия в перемещениях. Общее решение уравнений в перемещениях. Основные уравнения теории упругости в напряжениях. Полуобратный метод Сен-Венана. Принцип Сен-Венана. Простейшие задачи теории упругости. Метод суперпозиции. Общие теоремы и вариационные принципы теории упругости. Теорема Клайперона. Теорема о единственности решения. Теорема Бетти. Вариационные принципы. Принцип минимума потенциальной энергии. Принцип минимума дополнительной работы. Вариационный принцип Рейсснера. Метод Ритца. Метод Бубнова-Галеркина. Метод Канторовича. Метод Треффца. Уравнения теории упругости в криволинейных координатах. Компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля для некоторых ортогональных криволинейных координат. Уравнения в полярных координатах. Уравнения в цилиндрических координатах. Уравнения в сферических координатах. Кручение прямых брусьев. Постановка задачи и основные уравнения. Перемещения при кручении призматических брусьев и теорема о циркуляции касательного напряжения. Функция кручения. Теорема о максимуме касательного напряжения. Мембранная аналогия. Изгиб прямых брусьев. Постановка задачи и основные уравнения. Центр изгиба. Изгиб бруса эллиптического поперечного сечения. Изгиб бруса прямоугольного поперечного сечения. Плоская задача теории упругости. Плоская деформация. Функция напряжений. Плоское напряженное состояние. Обобщенное плоское напряженное состояние. Перемещения в плоской задаче. Теорема Леви-Мичелла. Представление бигармонической функции. Плоская задача в декартовых координатах.

Плоская задача в полярных координатах. Комплексное представление функции напряжений. Комплексное представление компонент тензора напряжений (формулы Колосова-Мусхелишвили). Задача о всестороннем растяжении плоскости с круговым отверстием.

## **Тема 2. Теория пластичности**

Уравнения пластического состояния. Механические свойства твердых тел. Условия текучести. Поверхность и кривая текучести. Условие постоянства максимального касательного напряжения (условия Треска - Сен-Венана.) Условие постоянства интенсивности касательных напряжений (условие пластичности Мизеса). Условия упрочнения. Теория пластического течения. Деформационная теория пластичности. Ассоциированный закон пластического течения. Постулат Друкера. Уравнения упругопластического равновесия. Простейшие задачи. Остаточные деформации и напряжения. Полый шар под действием давления. Цилиндрическая труба под действием давления. Кручение призматических стержней. Основные уравнения. Пластическое кручение. Упругопластическое кручение. Плоская деформация. Линии скольжения и их свойства. Простые напряженные состояния. Осесимметричное поле. Растяжение полосы, ослабленной вырезами. Плоское напряженное состояние. Уравнения плоского напряженного состояния. Построение решений при условии текучести Мизеса. Упругопластическое равновесие пластины с круговым вырезом под действием равномерного давления. Растяжение полосы, ослабленной вырезами. Теория приспособляемости. Поведение упругопластических тел при переменных нагрузках. Теоремы приспособляемости упругопластических тел.

## **Тема 3. Теория ползучести и вязкоупругости**

Понятие упругости, пластичности и ползучести. Течение в твердых телах. Понятие о реологии материала, релаксации, диссипации механической энергии. Обзор реологических свойств и структуры различных материалов: полимеры, бетон, металлы. Вязкоупругие определяющие соотношения между напряжениями и деформациями. Простейшие модели упруговязкого тела. Модели Фойгта, Максвелла, Томпсона. Модели с жесткопластическими элементами. Диаграммы зависимостей напряжений от деформаций. Интегральная форма определяющих соотношений между напряжениями и деформациями. Свертка Стильтьеса. Гипотеза о затухающей памяти и различие между вязкоупругими телами и жидкостями. Дифференциально-операторная форма определяющих соотношений между напряжениями и деформациями. Характеристики релаксации и ползучести. Механические модели.

## **Тема 4. Экспериментальные методы механики**

Механическое поведение материалов. Фотоупругость. Оптические методы исследования - раздел экспериментальных методов исследования в механике. Классификация методов. Историческая справка. Задачи, решаемые с помощью оптических методов. Некоторые примеры решения задач науки и техники. Метод муаровых полос. Сущность метода, его возможности, достоинства и недостатки. Классификация и разновидности метода: контактный и отражательный, теневой, и высокотемпературный муар. Техника проведения эксперимента. Расшифровка картины муаровых полос. Возможные источники погрешностей измерений и их анализ. Примеры решения задач.

Поляризационно-оптические методы исследования. Характеристики электромагнитных волн. Естественный, поляризованный, монохроматический свет. Способы получения поляризованного света. Экспериментальное обнаружение поляризованного света. Способы математического описания поляризованного света. Прохождение поляризованного света через оптически анизотропную среду. Двойное лучепреломление. Искусственная анизотропия. Теория пьезооптического эффекта. Закон Вертгейма. Методы расшифровки экспериментальных результатов полученных поляризационно-оптическими методами. Возможные источники погрешностей измерений и их анализ. Примеры решения задач.

Когерентно-оптические методы исследования. Основы когерентной оптики - лазерное излучение. Голография, ее сущность и краткий исторический очерк развития. Работы Д. Габора, Э.Лейта, Упатниекса, Ю.Н.Денисюка. Основные свойства голограмм. Метод голографической интерферометрии. Основные способы получения и восстановления голограмм: метод реального времени и метод двух экспозиций, стробоскопический метод, метод усреднения во времени. Расшифровка голограмм. Причины и анализ погрешностей. Некоторые примеры. Спекл-интерферометрия. Сущность и возможности метода. Расшифровка спекл-интерферограмм. Причины и анализ погрешностей. Примеры решения.

### **Тема 5. Механика разрушения**

Предмет механики разрушения. Возникновение механики разрушения: причины и истоки. Теоретическая и реальная прочность твердых тел. Первая модель тела с трещиной. Катастрофические разрушения твердых тел 40 – 50 годов прошлого века. Понятие о прочности твердых тел. Общие закономерности и основные типы разрушения. Виды дефектов в кристаллической решетке. Механизмы образования дислокационных микротрещин. Микромеханика. Феноменологические теории прочности. Критерии разрушения: деформационные, энергетические, энтропийный. Всесторонне растяжение пластины с круговым отверстием. Одноосное растяжение пластины с круговым отверстием. Растяжение плоскости с эллиптическим отверстием. Концентрация напряжений в области сферической полости в поле чистого сдвига. Концентрация напряжений в области сферической полости в поле одноосного растяжения. Полубесконечная трещина. Решение методом разложения по собственным функциям – решение Уильямса. Простейшие задачи о напряженном состоянии упругого тела с трещиной. Метод комплексных потенциалов. Метод конформных отображений для получения точных решений задач о трещине в линейно упругом материале. Три независимых типа трещин. Коэффициенты интенсивности напряжений. Коэффициент интенсивности напряжений и методы его расчета.

Энергетический критерий разрушения. Силовой критерий разрушения. Эквивалентность силового и энергетического критериев разрушения. Поток энергии в вершину трещины. Концепция квазихрупкого разрушения. Поправка Ирвина на пластическую деформацию. Область применимости линейной механики разрушения. Пространственные задачи механики разрушения. Напряженно-деформированное состояние окрестности вершины трещины. Эллиптическая трещина в бесконечном теле, нагруженном одноосным растяжением. Эллиптическая трещина в бесконечном теле при чистом изгибе. Метод объемных сил Эшелби в трехмерных задачах. Влияние физической нелинейности (Сингулярное решение Хатчинсона-Райса-Розенгрена). Пластическая область в вершине трещины в упругопластическом материале. Инвариантный J-интеграл Эшелби-Черепанова-Райса.. Локализованная пластичность. Трещина антиплоского сдвига в идеальнопластическом теле. Напряжения в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояния в идеально пластическом материале. Узкая зона локализации пластических деформаций у вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния. Модель трещины Леонова – Панасюка – Дагдейла. Модификации модели Дагдейла. Разгрузка трещины Дагдейла. Повторное нагружение трещины Дагдейла. Особенности усталостного разрушения. Эксперименты Велера. Многоцикловая и малоцикловая усталость. Виды циклического нагружения при лабораторных испытаниях. Исследование скорости распространения усталостных трещин. Формула Париса. Усталостная долговечность. Пластические зоны у вершины трещины при перегрузке. Асимптотический анализ усталостного роста трещины в среде с поврежденностью в связанной постановке (в связке упругость – поврежденность).

## **РАЗДЕЛ 3. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

### **Тема 1. Динамика идеальной среды**

Законы движения жидкости. Уравнение состояния и термодинамические величины.

Общая теория установившихся движений идеальных жидкостей и газов. Интеграл Бернулли. Интеграл Бернулли для несжимаемой тяжелой жидкости. Потенциальные течения идеальной жидкости. Интеграл Коши-Лагранжа. Свойства гармонических функций. Задача о движении сферы в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Комплексные потенциалы простейших потоков. Решение задачи обтекания методом конформных отображений. Постулат Жуковского-Чаплыгина. Формула циркуляции. Примеры применения метода конформных отображений. Обтекание эллипса и пластинки. Крыловые профили Жуковского-Чаплыгина.

## **Тема 2. Динамика несжимаемой вязкой жидкости**

Ньютоновская вязкая жидкость и ее реологическое уравнение. Реологические законы неньютоновских вязких несжимаемых жидкостей. Уравнение Навье-Стокса динамики ньютоновской несжимаемой среды. Подобие течений вязкой несжимаемой жидкости. Основы теории размерностей. П-теорема. Примеры решения уравнений Навье-Стокса. Простейшие линейные задачи. Интегрирование уравнений Навье-Стокса: линеаризованные, автомодельные и численные решения. Обтекание шара при малых значениях числа Рейнольдса; формула Стокса и ее обобщение. Ламинарный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Взаимодействие конвекции и диффузии в потоке несжимаемой вязкой жидкости. Ламинарный пограничный слой. Вывод уравнений Прандтля движения вязкой жидкости в ламинарном пограничном слое. Простейшие автомодельные решения уравнений ламинарного пограничного слоя. Пограничный слой на продольно обтекаемой пластине. Примеры плоских «свободных» пограничных слоев: дальний след за телом, «затопленная» струя, бьющая за точечным источником. Задача о плоской пристенной струе. Общий случай точных автомодельных решений уравнений стационарного плоского пристенного пограничного слоя.

## **РАЗДЕЛ 4. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

### **Тема 1. Квантовая механика**

Предпосылки революции в физике в конце XIX века. Фотоэффект, ультрафиолетовая катастрофа. Гипотеза Планка, формула излучения Планка, постоянная Планка. Фотоэффект, законы Столетова. Теория Эйнштейна фотоэффекта. Давление света проводник, импульс электромагнитной волны. Связь энергии и импульса фотонов. Комплексная запись электромагнитной волны. Гипотеза Де Бройля, волна Де Бройля. Уравнение Шредингера. Уравнение Шредингера для волны Де Бройля. Физический смысл волновой функции. Принцип суперпозиции. Плотность потока вероятности. Необратимость процессов и принцип причинности в квантовой механике. Стационарное уравнение Шредингера. Собственные функции и собственные значения в уравнении Шредингера. Энергетический спектр. Вырождение собственных значений. Частные решения уравнения Шредингера. Общие свойства одномерного движения. Невырожденность энергетических уровней. Потенциальный барьер, прохождение и отражение частиц. Тоннельный эффект. Теория  $\alpha$ -распада. Поведение частицы в потенциальной яме и потенциальном «ящике». Квантовые числа. Решение уравнения Шредингера для одномерного осциллятора. Квантование энергетических уровней. Переход к классической механике при больших квантовых числах. Неравенство Гейзенберга. Одномерная частица как волновой пакет. Соотношение неопределенности Гейзенберга для координат и импульсов. Соотношение неопределенности Гейзенберга для энергии и времени. Оценка размера атома из неравенства Гейзенберга. Квазиклассическое приближение при описании движения частицы в неоднородном поле. Движение в однородном силовом поле. Теория атома водорода. Трехмерное уравнение Шредингера в центральном поле. Решение уравнения Шредингера для движения электрона в атоме водорода. Вырождение энергетических уровней. Спектры излучения атома водорода.

## **Тема 2. Статистическая физика**

Основные принципы статистического описания. Статистическое описание систем с большим числом степеней свободы. Статистическая независимость макроскопических подсистем. Плотность распределения, теорема Лиувилля. Статистический вес системы. Энтропия, формула Больцмана. Энтропия систем с дискретными состояниями. Свойства энтропии. Энтропия как мера информации. Понятие термодинамического равновесия. Энтропия замкнутой системы в состоянии термодинамического равновесия. Второе начало термодинамики. Иллюстрация второго начала на примере диффузии примесей. Распределение Гиббса. Вывод распределения Гиббса на основе теоремы Лиувилля. Статистическое определение температуры. Распределение Максвелла в классической статистике. Физический смысл температуры. Термодинамические потенциалы. Давление. Внутренняя энергия, свободная энергия, термодинамический потенциал, энтальпия. Первое начало термодинамики. Понятие термодинамического равновесия открытых систем. Физический смысл потенциалов. Переход от статистического описания системы к термодинамическому. Свободная энергия в распределении Гиббса. Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа. Термодинамические процессы в идеальном газе. Распределение Больцмана. Распределение Больцмана в классической статистике. Формула Больцмана. Распределение плотности идеального газа в потенциальном поле. Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Пределы применимости теоремы. Флуктуации. Распределение Гаусса. Распределение Гаусса для нескольких величин. Вычисление средних квадратов и корреляции термодинамических величин.

## **РАЗДЕЛ 5. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ**

### **Тема 1. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела**

1. Обратные и некорректные задачи. Некоторые вопросы математического моделирования. Понятие о корректных и некорректных задачах. Степень некорректности и точность. Способы преодоления некорректности. Регуляризация. Дискретизация некорректных задач. Некоторые особенности обратных задач и методы их исследования. Классификация обратных задач механики деформируемого твердого тела. Постановки обратных задач.
2. Обратные ретроспективные задачи. Обратная ретроспективная задача (первая постановка). Метод квазиобращения. Обратная ретроспективная задача (вторая постановка.)
3. Коэффициентные обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. Об идентификации линейных динамических систем. Идентификация полимерных материалов на основе дифференциальной формы определяющих уравнений. Обратные коэффициентные задачи для упругого стержня. Коэффициентная обратная задача для волнового уравнения. Обратная задача сейсмологии. Обратная задача Лэмба. Интегральные уравнения в обратных коэффициентных задачах теории упругости. Коэффициентные обратные задачи несвязанной термоупругости (к определению коэффициента термоупругости). Коэффициентные задачи электроупругости.
4. Обратные граничные задачи теории упругости. Постановка обратных граничных задач в теории упругости и методы их исследования. Граничные обратные задачи для конечных тел. Обратные граничные задачи для полосы. Обратные граничные задачи для пластин. Об условной корректности обратных граничных задач теории упругости.
5. Определение сферического упругого включения или сферической полости с помощью инвариантных интегралов механики разрушения.

### **Тема 2. Асимптотическая теория и методы возмущений**

1. Основы асимптотической теории. Анализ размерностей. Разложения по степеням параметра или независимой переменной. Функции сравнения (калибровочные функции). Символы порядка. Асимптотические ряды. Асимптотические разложения и последовательности. Единственность асимптотических разложений. Сравнение сходящихся

и асимптотических рядов. Простейшие действия над асимптотическими разложениями. Неравномерные разложения.

2. Прямые разложения (разложения типа Пуанкаре) и источники неравномерностей. Бесконечные области. Уравнение Дюффинга. Малый параметр при старшей производной. Пример уравнения второго порядка. Изменение типа дифференциального уравнения в частных производных. Наличие особенностей.

3. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.

Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.

Уравнение Дюффинга: прямое разложение Пуанкаре, точное решение, методика Линдштедта – Пуанкаре, метод многих масштабов, метод усреднения. Колебательные системы с самовозбуждением: прямое разложение, метод перенормировки, метод многих масштабов, метод усреднения. Системы с квадратичными и кубическим нелинейностями: прямое разложение, метод многих масштабов, метод усреднения, обобщенный метод усреднения, метод Крылова-Боголюбова-Митропольского. Уравнение Дюффинга. Случай вынужденных колебаний.

4. Метод сращивания асимптотических разложений. Задачи с пограничным слоем. Асимптотические разложения в краевых задачах. Метод сращивания асимптотических разложений и составные разложения. Метод Прандтля. Внешнее и внутреннее разложения. Высшие приближения и усовершенствованные процедуры сращивания. Метод составных разложений. Уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с переменными коэффициентами. Задачи с двумя пограничными слоями.

5. Условия разрешимости.

Представление об условии разрешимости. Нелинейные колебания в системах с двумя степенями свободы. Системы с параметрическим возбуждением. Краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка. Задачи на собственные значения. Краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка. Задача на собственные значения для дифференциального уравнения четвертого порядка.

6. Применение условия разрешимости. Звуковые волны в канале с волнистыми стенками. Колебания мембраны, близкой по форме к кругу. Асимптотические методы в механике.

7. Асимптотическое моделирование в теории теплопроводности.

Задачи теплопроводности. Уравнение теплопроводности. Метод разделения переменных. Регулярное возмущение границы. Метод разделения переменных в случае границы, отличной от круговой. Осреднение процесса теплопроводности в слоистых средах.

Применение метода многих масштабов. Метод осреднения. Эффективный коэффициент теплопроводности. Метод Бахвалова. Осреднение процесса теплопроводности в композиционном материале. Постановка задачи. Асимптотика решения. Осредненная задача. Осреднение процесса теплопроводности в периодической пористой среде. Симметрия эффективных коэффициентов теплопроводности. Осреднение границы в теории теплопроводности. Асимптотическое моделирование теплопроводности в тонком стержне. Асимптотическое моделирование теплопроводности в тонкой пластине: квазидвумерная теплопроводность в тонкой пластине, анизотропный случай. Метод сращивания асимптотических разложений. Постановка задачи теплопроводности в области с малым включением. Определение калибровочных последовательностей. Асимптотическая модель теплопроводности в плоской области с высокотеплопроводными включениями малого диаметра.

8. Асимптотическое моделирование в задачах теории упругости. Асимптотическое моделирование реальных трещин в плоской теории упругости. Асимптотические методы в механике разрушения. Метод малого параметра в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями.

9. Асимптотические модели деформации упругих мембран и оболочек.

Задача о деформировании упругой мембраны. Контактная задача для упругой мембраны. Метод Вишика-Люстерника. Деформация упругой мембраны, армированной нитями. Защемление упругой пластины во внутренней точке.

### **Тема 3. Автомодельные решения уравнений математической физики и механики**

Анализ размерностей и подобие. Размерность. Анализ размерностей. Подобие. П-теорема. Применение анализа размерностей величин к построению точных частных решений задач математической физики и механики. Автомодельные решения. Сильные тепловые волны. Сильные взрывные волны. Автомодельность. Промежуточная асимптотика.

Автомодельные решения второго рода. Модифицированная задача о мгновенном тепловом источнике. Автомодельное решение второго рода.

Модифицированная задача о мгновенном тепловом источнике. Прямое применение анализа размерностей в модифицированной задаче о мгновенном тепловом источнике. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика. Автомодельное предельное решение. Модифицированная задача о сильном взрыве. Прямое применение анализа размерностей в модифицированной задаче о точечном сильном взрыве. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика. Автомодельное предельное решение. Качественное исследование нелинейной задачи на собственные значения. Задача о коротком ударе. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика. Автомодельное предельное решение.

Классификация автомодельных зависимостей и автомодельных решений. Полная и неполная автомодельность. Автомодельные решения первого и второго рода.

Автомодельные решения и бегущие волны. Полная и неполная автомодельность упругости и разрушения. Решения типа бегущих волн. Ударная волна Бюргерса – стационарная бегущая волна первого рода. Пламя – стационарная бегущая волна второго рода. Задача о равновесии упругого клина под действием пары сил, приложенной в его вершине. Парадокс Стернберга-Койтера. Промежуточная асимптотика решения неавтомодельной задачи. Законы подобия хрупкого и квазихрупкого разрушения.

Решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Метод подобия. Общий вид решений типа бегущей волны. Инвариантность уравнений относительно преобразований сдвига. Функциональное уравнение, задающее решение типа бегущей волны. Метод подобия. Примеры автомодельных решений уравнений математической физики и механики. Уравнения, инвариантные относительно комбинаций преобразований сдвига и растяжения, и их решения. Экспоненциально-автомодельные решения. Инвариантные решения. Обобщенно-автомодельные решения.

Симметрия в математике. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Симметрия в современной математике. Группы преобразований. Множества и отображения. Преобразования и их свойства. Группы преобразований и их инварианты. Общее понятие группы. Определение группы. Четные и нечетные функции. Задача о кубе. Задача о восстановлении формы тела. Томограф и его устройство. Однопараметрические группы преобразований. Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группу. Обыкновенные дифференциальные уравнения, обладающие фундаментальной системой решений. Фундаментальные решения уравнений математической физики как инвариантные решения. Группа Галуа.

Группы преобразований. Группа точечных преобразований. Продолжение группы и инфинитезимального оператора. Дифференциальные уравнения, допускающие группу. Интегрирование и понижение порядка с помощью однопараметрической группы. Определяющее уравнение. Алгебра Ли.

Интегрирование уравнений второго порядка, допускающих двухпараметрическую группу.

Разрешимые алгебры Ли. Интегрирование в квадратурах с помощью двумерной алгебры. Пример уравнения, не допускающего группу, но интегрируемого в квадратурах. Групповая

классификация уравнений второго порядка. Уравнения, допускающие трехмерную алгебру Ли. Общая классификация. Один замечательный класс уравнений. Признаки линеаризуемости. Инвариантные решения. Определения и решения. Оптимальная система инвариантных решений. Интегрирование уравнений второго порядка, допускающих 3-хмерную алгебру. Решение одной инвариантной краевой задачи. Сферические функции. Групповой подход в методе Римана.

Классический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений.

Однопараметрические преобразования и их локальные свойства. Однопараметрические преобразования и их локальные свойства. Инфинитезимальный оператор. Инвариант оператора. Преобразования на плоскости. Формулы для вычисления производных. Координаты первого и второго продолжений.

Симметрии нелинейных уравнений второго порядка. Условие инвариантности. Процедура расщепления по производным. Примеры поиска симметрий нелинейных уравнений математической физики. Двумерное стационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником. Нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности. Нелинейное волновое уравнение. Допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты движения нелинейной вязко-пластической среды.

Использование симметрий уравнения для поиска точных решений. Использование симметрий уравнения для построения однопараметрических решений. Процедура построения инвариантных решений. Примеры построения инвариантных решений нелинейных уравнений. Решения, порожденные линейными комбинациями допускаемых операторов.

Уравнения старших порядков. Однопараметрические группы Ли точечных преобразований. Генератор группы. Инвариант группы. Локальные преобразования производных. Условие инвариантности. Процедура расщепления. Инвариантные решения. Допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения стационарного безградиентного гидродинамического пограничного слоя. Допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения стационарного градиентного гидродинамического пограничного слоя.

Симметрии систем уравнений математической физики. Основные соотношения, используемые при анализе симметрий систем уравнений. Симметрии уравнений гидродинамического пограничного слоя. Допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений установившегося околосзвукового течения газа. Допустимые операторы и инвариантные решения нелинейной системы уравнений одномерных длинноволновых колебаний упругого стержня. Допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений одномерного изэнтропического движения идеального газа. Допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений двумерного установившегося течения идеальной несжимаемой жидкости.

Неклассический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений. Описание метода. Условие инвариантной поверхности. Алгоритм построения точных решений неклассическим методом для эволюционных уравнений второго порядка. Конкретные примеры: уравнение Фитсхью-Нагумо и нелинейное волновое уравнение.

#### **Тема 4. Использование конечно-элементного пакета Simulia ABAQUS для решения задач механики деформируемого твердого тела**

Структура CAE-интерфейса. Моделирование статической линейной задачи для двумерного объекта на примере консольно закрепленной балки. Моделирование статической линейной задачи для трехмерного объекта на примере изгиба консольно-закрепленной балки. Использование различных типов элементов. Изменение параметров сетки. Моделирование различных типов материалов (изотропные, ортотропные, слоистые, гиперэластичные) на примере изгиба консольно-закрепленной балки. Задание пределов пропорциональности и прочности, переход к нелинейной статической задаче. Моделирование динамической задачи

на примере свободных колебаний консольно-закрепленной балки. Анализ частотных характеристик, запись результатов анализа в отчетные файлы. Моделирование контактной задачи на примере падения твердого шара на свободный конец консольно-закрепленной балки с различными начальными условиями. Моделирование контактной задачи на примере взаимодействия консольно-закрепленной балки и лежащего на ней упругого цилиндра, нагруженного поперечной силой. Запись результатов анализа в видеоклип. Моделирование статической линейной задачи на примере нагрева и охлаждения консольно закрепленной балки. Исследование возникающих температурных напряжений. Моделирование статической линейной задачи на примере электростатического взаимодействия консольно закрепленной балки с заряженными телами различной геометрической формы. Технология моделирования роста трещины XFEM. Импорт/экспорт геометрии и моделей. Дополнительные методы создания и анализа моделей. Создание скриптов в Abaqus/CAE. Система единиц в SIMULIA Abaqus.

#### **Литература основная**

1. Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. Либроком, 2012. 210 с.
2. Рыжак Е.И. Бескоординатное тензорное исчисление для механики сплошных сред. М.: МФТИ, 2011. 170 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Лань, 2004. Т.1. 568 с. Т.2. 586 с.
4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. Либроком, 2010. 322 с.
5. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. Комкнига, 2010. 376 с.
6. Вебстер А.Г. Механика материальных точек, твердых упругих и жидких тел. Лекции по математической физике. Т.2. Механика сплошной среды. ЛКИ, 2008. 286 с.
7. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. Либроком, 2009. 82 с.
8. Введение в механику сплошных сред: Учебное пособие/ К.Ф. Черных, Ю.З. Алешковский, В.В. Понятовский, В.А. Шамина, Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1984. 280 с.
9. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
10. Кукуджанов В.Н. Численные методы в механике сплошных сред. М.: «МАТИ»-РГТУ, 2006. 158 с.
11. Howell P., Kozyreff G., Ockendon J. Applied Solid Mechanics. Cambridge University Press. 2008. 452 p.
12. Lubliner J. Plasticity Theory. University of California at Berkeley, 2006. 540 p.
13. Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа. СПб.: Изд-во СПбПУ, 2008. 109 с.
14. Пальмов В.А. Определяющие уравнения термоупругих, термовязких и термопластических материалов. СПб.: Изд-во СПбПУ, 2009. 138 с.
15. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ, 2008. 215 с.
16. Экспериментальная механика. Под ред. Р.К. Вафина, О.С. Нарайкина. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 136 с.
17. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред. Комкнига, 2010. 376 с.

#### **Литература дополнительная**

1. Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М.: Физматлит, 2009. 336 с.
2. Степанова Л.В., Федина М.Е. Связанные задачи теории ползучести и механики поврежденности. Самара: Изд-во «Самарский университет». 2006. 92 с.

3. Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. Самара: Издательство «Самарский университет», 2006. 232 с.
4. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара.: Изд-во Самарский университет, 2001. 632 с.
5. Бьюи Х.Д. Механика разрушения: обратные задачи и решения. М.: Физматлит, 2011. 412 с.
6. Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009. 216 с.
7. Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности: Учеб. пособ. для вузов. Самара : Самарский университет, 2006. 340 с.
8. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
9. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969, 608 с.
10. Пергамент М.И. Методы исследований в экспериментальной физике. Учебное пособие. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2010. 304 с.
11. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
12. Балина В.С., Ланин А.А. Прочность и долговечность конструкций при ползучести. СПб.: Политехника, 2003. 182 с.
13. Шестериков С.А. Избранные труды. М.: Изд-во Московского университета, 2007. 242 с.
14. Пергамент М.И. Методы исследований в экспериментальной физике. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2010. 304 с.
15. Албаут Г.Н. Нелинейная фотоупругость в приложении к задачам механики разрушения. Новосибирск: НГАСУ, 2002. 112 с.
16. Аргатов И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб.: Политехника, 2004. 302 с.
17. Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
18. Экспериментальная механика: В 2-х книгах. Под ред А. Кобаяси. М.Мир, 1990. 616 с.
19. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. Точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
20. Кудряшов А.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2010. 368 с.
21. Темам Р., Миранвиль А. Математическое моделирование в механике сплошных сред. Бином. Лаборатория занятий. 2013. 320 с.
22. Баушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошных сред. Плоская задача. Либроком, 2013. 312 с.
23. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
24. Handbook of Experimental Stress Analysis. New York: Springer, 2008. 1083 p.
25. Razumovsky I.A. Interference-Optical Methods of Solid Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 180 p.
26. Springer Handbook of Lasers and Optics. F. Träger (Ed.). Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.
27. Ramesh, K., Digital Photoelasticity—Advanced Techniques and Applications, Springer, New York, 2000.
28. Asundi A.K. Matlab for Photomechanics. Amsterdam: Elsevier, 2002. 199 p.
29. Searle G.F.C. Experimental Elasticity. A Manual for the laboratory. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 206 p.
30. Sciamarella C.A., Sciamarella F.M. Experimental Mechanics of Solids. Willey, 2012. 776.

31. Voyiadis G.Z., Kattan P.I. *Damage Mechanics with Finite Elements: Practical Applications with Computer Tools*. Springer, 2012. 113 p.
32. Bouharova T., Elboudjaini M., Pluvinage G. *Damage and Fracture Mechanics: Failure Analysis of Engineering materials and Structures*. Springer, 2009. 614 p.
33. Кудряшов А.А. *Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2010. 368 с.*
34. Kuna M. *Finite Elements in Fracture Mechanics. Theory – Numerics – Applications. Solid Mechanics and Its Applications*, 2013, v.201.
35. Rao S. S. *The Finite Element Method In Engineering*. Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo: Elsevier, 2011. 727p.
36. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo: Elsevier, 2005. 648p.
37. Nushtaev D. V. *Abaqus. The manual for beginners. The step by step instruction. TESIS, Moscow 2010, 78 p.*
38. Paulsen W. *Asymptotic Analysis and Perturbation Theory*. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2014. 546 p.
39. Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity*. Dover Publications, 2010. 384 p.
40. Andrianov, J. Awrejcewicz, L.I. Manevitch, *Asymptotical Mechanics of Thin Walled Structures. A Handbook*. Berlin: Springer-Verlag; 2004.
41. Marques S.P.C., Creus G.J. *Computational Viscoelasticity*. New York: Springer, 2012. 124 p.
42. Ibrahimbegovic A. *Nonlinear Solid Mechanics. Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods*. New York, Springer, 2009. 588 p.
43. Barbero E.J. *Finite Element Analysis of Composite Materials using ABAQUS*. CRC Press, 2013. 444 p.
44. *Principles of Composite Material Mechanics*. CRC Press, 2011. 683 p.
45. Neto F.D.M., Neto A.J.S. *An Introduction to Inverse Problems with Applications*. Berlin: Springer, 2013. 255 p.
46. Bal G. *Introduction to Inverse Problems*. New York: Columbia University, 2012. 205 p.
47. Bui H.D. *Fracture Mechanics: Inverse problems and Solutions*. Dordrecht: Springer, 2006. 376 p.