

ВТОРАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ ТОЧКИ. РЕШЕНИЕ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ НА ЭВМ

Теоретическая часть

Вторая задача динамики точки заключается в том, что по заданным силам, действующим на материальную точку, требуется найти уравнения движения этой точки [1].

Рассмотрим движение материальной точки M относительно инерциальной декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ (рис. 3.14). В ней выполняется второй закон Ньютона [1], который запишем в виде:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

где x, y, z – координаты точки, t – время, m – масса точки, $F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$,

$F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ – проекции на оси Ox, Oy, Oz равнодействующей всех сил, приложенных к точке.

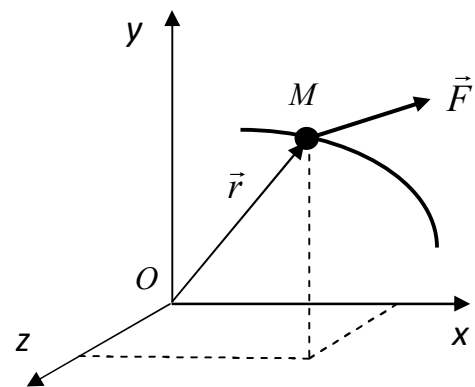
Соотношения (3.10) являются дифференциальными уравнениями движения материальной точки. Решение второй задачи динамики точки сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (3.10). Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Эти постоянные находятся с помощью начальных условий, определяющих положение и скорость точки в начальный момент времени:

$$t = t_0, \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \quad (3.12)$$

С математической точки зрения рассматриваемая вторая задача динамики точки является задачей Коши [3]. Как правило, студенты изучают только точные аналитические методы решения такой задачи. Между тем, во многих



Р и с. 3.14 Динамика точки

практически важных случаях её решение может быть получено лишь приближенными способами.

Благодаря интенсивному развитию цифровой вычислительной техники наибольшее значение приобрели численные методы решения дифференциальных уравнений. Они позволяют получить таблицу приближённых значений искомого решения на некоторой сетке значений аргумента.

Цель данной лабораторной работы: освоение технологии приближённого численного решения второй задачи динамики материальной точки с помощью программного пакета Mathematica. Такая работа расширит и закрепит знания учащихся по основам механики, будет способствовать внедрению современных компьютерных технологий в учебный процесс.

Постановка задачи. Задания

Найти в интервале времени $0 - 10$ с закон движения тела M , считая его материальной точкой. Определить траекторию движения и зависимость скорости от времени.

Все необходимые исходные данные приведены в таблицах 3.2, 3.3 и на рис. 3.15 – 3.17. Приняты следующие обозначения:

x, y, z - координаты точки M ; t - время; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей Ox, Oy, Oz ; \vec{r} – радиус-вектор точки; m – масса тела; \vec{V} – вектор скорости точки; \vec{G} – сила тяжести; \vec{P} – сила, модуль которой задан в табл. 3.3, направление – в табл. 3.2; \vec{T} - сила, заданная проекциями в табл. 3.2; \vec{Q} -сила сопротивления, заданная в табл. 3.2; \vec{R} – центральная сила, заданная в табл. 3.2.

Решение производится численным шаговым методом с помощью программного пакета Mathematica.

В результате численного решения должны быть получены уравнения движения в табличной и графической формах, а также графики проекций скоростей в зависимости от времени и рисунок траектории в координатной плоскости.

Варианты 1 – 3 (рис. 3.15).

Тело движется в вертикальной плоскости xOy под действием сил \vec{P}, \vec{T} и силы тяжести \vec{G} , направленной противоположно оси Oy .

Варианты 4 – 6 (рис. 3.15).

Тело движется в вертикальной плоскости xOy под действием сил \vec{P} , \vec{T} и силы сопротивления \vec{R} .

Варианты 7 – 9 (рис. 3.15).

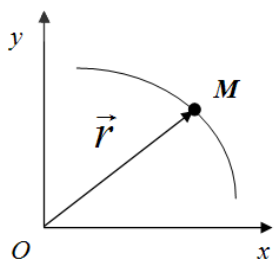
Тело движется в вертикальной плоскости xOy под действием силы \vec{P} , силы сопротивления \vec{R} , и силы тяжести \vec{G} , направленной противоположно оси Oy .

Варианты 10 – 12 (рис. 3.15).

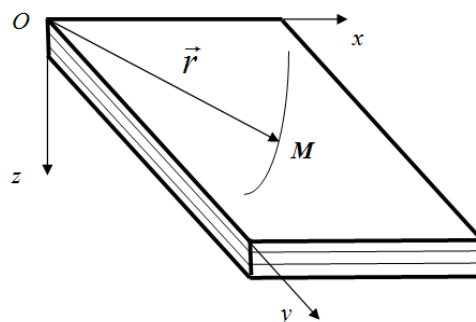
Тело движется в вертикальной плоскости xOy под действием сил \vec{P} , \vec{T} и центральной силы \vec{Q} .

Варианты 13 – 15 (рис. 3.16).

Тело движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием сил \vec{P} , \vec{T} и силы сопротивления \vec{R} .



Р и с. 3.15. Схема движения тела в вариантах 1 – 12



Р и с. 3.16. Схема движения тела в вариантах 13 – 21

Варианты 16 – 18 (рис. 3.16).

Тело движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием сил \vec{P} , \vec{T} и центральной силы \vec{Q} .

Варианты 19 – 21 (рис. 3.16).

Тело движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы \vec{P} , центральной силы \vec{Q} и силы сопротивления \vec{R} .

Варианты 22 – 24 (рис. 3.17).

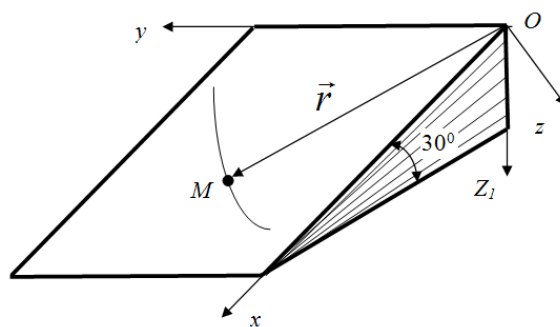
Тело движется по гладкой наклонной плоскости под действием сил \vec{P} , \vec{T} и силы тяжести \vec{G} , направленной по оси Oz_1 .

Варианты 25 – 27 (рис. 3.17)

Тело движется по гладкой наклонной плоскости под действием силы \vec{P} , силы сопротивления \vec{R} и силы тяжести \vec{G} , направленной по оси Oz_1 .

Варианты 28 – 30 (рис. 3.17).

Тело движется по гладкой наклонной плоскости под действием силы \vec{P} , центральной силы \vec{Q} и силы тяжести \vec{G} , направленной по оси Oz_1 .



Р и с. 3.17. Схема движения тела в вариантах 22 – 30

Таблица 3.2

Исходные данные

№	№ рисунка	m, кг	$\vec{T} = T_x \vec{i} + T_y \vec{j}$		\vec{Q}, H	\vec{R}, H	\vec{P}, H	Начальные условия			
			T_x, H	T_y, H				$X_0, м$	$Y_0, м$	$\dot{X}_0, м/с$	$\dot{Y}_0, м/с$
1	3.15	5	$3+0,3t^2 - 0,1\dot{x} - 0,02\dot{x}^2$	$50+0,5t^2 - 0,2\dot{y} - 0,01\dot{y}^2$			$P \vec{i}$	0	0	1	1
2		10	$5+0,4t^2 - 0,2\dot{x} - 0,01\dot{x}^2$	$100+0,6t^2 - 0,3\dot{y} - 0,02\dot{y}^2$			$P\vec{V}/ \vec{V} $	10	10	5	5
3		15	$7+0,6t^2 - 0,3\dot{x} - 0,02\dot{x}^2$	$150+0,7t^2 - 0,2\dot{y} - 0,02\dot{y}^2$			$P \vec{j}$	10	0	7	7
4		10	$3 + 3t$	$5 + 2t$		$-0,03 \vec{V} \vec{V}$	$P \vec{i}$	0	0	1	1
5		20	$5 + 4t$	$10 + 4t$		$-0,04 \vec{V} \vec{V}$	$P\vec{V}/ \vec{V} $	10	0	2	2
6		30	$8 + 5t$	$16 + 6t$		$-0,05 \vec{V} \vec{V}$	$P \vec{j}$	0	10	3	3
7		1				$-0,1\vec{V}$	$P\vec{V}/ \vec{V} $	0	0	1	2
8		2				$-0,2\vec{V}$	$P\vec{V}/ \vec{V} $	10	5	3	2
9		3				$-0,1\vec{V}$	$P\vec{V}/ \vec{V} $	1	0	4	3

№ варианта	№ рисунка	m, кг	$\vec{T} = T_x \vec{i} + T_y \vec{j}$		\vec{Q}, H	\vec{R}, H	\vec{P}, H	Начальные условия			
			T_x, H	T_y, H				$X_0, м$	$Y_0, м$	$\dot{X}_0, м/с$	$\dot{Y}_0, м/с$
10	3.15	1		2	$- \vec{r} ^{-3} \vec{r}$		$P\vec{i}$	1	0	0,5	0,6
11		2	3		$-2,5 \vec{r} ^{-3} \vec{r}$		$P\vec{j}$	0	1	0,4	0,5
12		3		4		$-3 \vec{r} ^{-3} \vec{r}$		$P\vec{i}$	1	1	0,6
13	3.16	2	$10 - 0,2t^2 - 0,01\dot{x}^2$	$0,1t^2 - 0,02\dot{y}^2$		$-0,2\vec{V}$	$P\vec{j}$	8	8	4	3
14		4	$40 - 0,3t^2 - 0,01\dot{x}^2$	$0,5t^2 - 0,01\dot{y}^2$		$-0,1\vec{V}$	$P\vec{V}/ \vec{V} $	10	0	3	6
15		8	$60 - 0,4t^2 - 0,02\dot{x}^2$	$0,7t^2 - 0,02\dot{y}^2$		$-0,15\vec{V}$	$P\vec{i}$	0	8	6	5
16		2	$e^{0,2t} - 0,01\dot{x}^2$	$e^{0,2t} - 0,02\dot{y}^2$	$-2\vec{r}$		$P\vec{i}$	2	0	1	22
17		4	$e^{0,3t} - 0,02\dot{x}^2$	$e^{0,3t} - 0,01\dot{y}^2$	$-3\vec{r}$		$P\vec{V}/ \vec{V} $	1	1	2	1
18		6	$2e^{0,3t} - 0,02\dot{x}^2$	$e^{0,2t} - 0,03\dot{y}^2$	$-4\vec{r}$		$P\vec{j}$	2	1	1	1
19		1			$4 \vec{r} ^{-2} \vec{r}$	$-0,01 \vec{V} \vec{V}$	$P\vec{V}/ \vec{V} $	0	1	0,4	0,3
20		2			$5 \vec{r} ^{-2} \vec{r}$	$-0,02 \vec{V} \vec{V}$	$P\vec{V}/ \vec{V} $	1	0	0,2	0,4
21		3			$5 \vec{r} ^{-2} \vec{r}$	$-0,015 \vec{V} \vec{V}$	$P\vec{V}/ \vec{V} $	1	1	0,3	0,5

№ варианта	№ рисунка	m, кг	$\vec{T} = T_x \vec{i} + T_y \vec{j}$		\vec{Q}, H	\vec{R}, H	\vec{P}, H	Начальные условия			
			T_x, H	T_y, H				$X_0, м$	$Y_0, м$	$\dot{X}_0, м/с$	$\dot{Y}_0, м/с$
22	3.17	10	$-0,5t^2 - 0,1\dot{x} - 0,02\dot{x}^2$	$0,6t^2 - 0,1\dot{y} - 0,01\dot{y}^2$			$P\vec{i}$	1	1	2	1
23		20	$-0,6t^2 - 0,2\dot{x} - 0,01\dot{x}^2$	$0,5t^2 - 0,2\dot{y} - 0,02\dot{y}^2$			$P\vec{V} / \vec{V} $	0	1	1	2
24		30	$t^2 - 0,3\dot{x} - 0,01\dot{x}^2$	$0,5t^2 - 0,2\dot{y} - 0,01\dot{y}^2$			$P\vec{j}$	1	0	1	1
25		10				$-0,2\vec{V}$	$P\vec{V} / \vec{V} $	0	0	2	3
26		10				$-0,3\vec{V}$	$P\vec{V} / \vec{V} $	1	0	3	1
27		30				$-0,3\vec{V}$	$P\vec{V} / \vec{V} $	0	1	1	2
28		1			$-0,5 \vec{r} \vec{r}$		$P\vec{j}$	2	1	1	1,5
29		2			$-0,7 \vec{r} \vec{r}$		$P\vec{i}$	1	2	0,5	1
30		3			$- \vec{r} \vec{r}$		$P\vec{j}$	2	0,5	1	0,5

21		7	8,2	9,2	10	10,6	11	11,2	11,2	11	10,6	10
----	--	---	-----	-----	----	------	----	------	------	----	------	----

Продолжение таблицы 3.3

№ варианта	№ рисунка	$P = P(t), H$										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22	3.1 7	50	65	80	95	110	125	140	125	110	95	80
23		60	61,6	66,4	74,4	85,6	100	117,6	138,5	162,8	189,5	200
24		70	82	92	100	106	110	112	112	110	106	100
25		50	55	60	60	70	75	80	85	90	95	100
26		60	61,6	66,4	74,4	85,6	100	117,6	138,5	162,8	189,5	200
27		70	92	112	130	146	160	172	182	190	196	200
28		2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
29		3	3,05	3,2	3,45	3,8	4,25	4,8	5,45	6,2	7,05	8
30		4	5,5	6,8	7,9	8,8	9,5	10	10,3	10,4	10,3	10

Контрольные вопросы

1. Первый закон Ньютона?
2. Второй закон Ньютона?
3. Третий закон Ньютона?
4. Принцип независимости действия сил?
5. Правило сложения сил, приложенных к материальной точке?
6. Инерциальная система отсчёта?
7. От каких величин может зависеть сила?
8. Написать вектор постоянной силы, противоположной скорости.
9. Написать вектор силы сопротивления, пропорциональной скорости и направленной противоположно скорости.
10. Написать вектор силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости и направленной противоположно скорости.
11. Определение понятия “ускорение”.
12. Определение понятия “скорость”.
13. Первая задача динамики материальной точки?
14. Вторая задача динамики материальной точки?
15. Дифференциальные уравнения движения материальной точки?
16. Методы интегрирования дифференциальных уравнений движения.
17. Формальный вид общего решения второй задачи динамики точки?
18. Как определяются постоянные интегрирования?
19. Что включают в себя начальные условия?
20. Что такое “траектория” движущейся точки?
21. Как получаются уравнения траектории движущейся точки?

Оформление отчёта

В отчёт включаются следующие пункты.

1. Постановка задачи:
 - расчётная схема движения точки;
 - данные своего варианта задачи;
 - искомые величины.
2. Короткое описание алгоритма компьютерного численного решения задачи с указанием двух этапов вычислений: аппроксимации таблично заданной силы и интегрирования дифференциальных уравнений

движения материальной точки (соответствующие команды программы Mathematica показаны на рис. 6, 7).

3. Результаты аппроксимация таблично заданной силы $P(t)$ с помощью программы Mathematica: (см. рис. 6).
4. Уравнения движения в табличной и графической формах, а также графики проекций скоростей в зависимости от времени и рисунок траектории в координатной плоскости $xу$ (см. рис. 7).

Пример выполнения задания

Постановка задачи

Найти в интервале времени $0 - 10$ с закон движения тела M , считая его материальной точкой. Тело движется в плоскости Oxy под действием сил:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= f(t)|V|^{-1}(V,i)\vec{i} \quad H, \\ \vec{T} &= (-0,5t^2 - 0,02\dot{x}^2)\vec{i} + (0,6t^2 - 0,01\dot{y}^2)\vec{j} \quad H, \\ \vec{R} &= -0,1\vec{V} \quad H, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где t – время, V – скорость, i, j, k – единичные вектора осей (орты). Значения модуля силы P в зависимости от времени представлены в таблице 3.4. Масса тела $m = 1$ кг. Начальные условия:

$$t_0 = 0 \text{ с}, \quad x_0 = 2 \text{ м}, \quad y_0 = 1 \text{ м}, \quad \dot{x}_0 = 0,5 \text{ м/с}, \quad \dot{y}_0 = 1 \text{ м/с}. \quad (3.14)$$

Таблица 3.4

Значения модуля силы $P(t)$

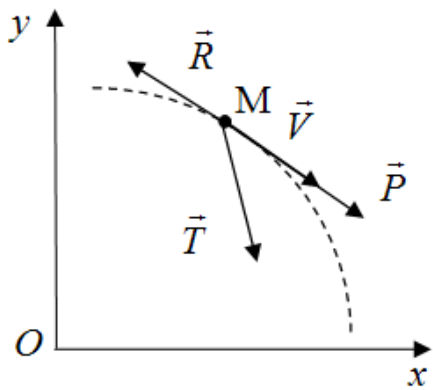
$t, \text{ с}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P, \text{ Н}$	50	65	80	95	110	125	140	125	110	95	80

Решение задачи

Схема движения точки и действующих сил представлена на рисунке 3.18.

Дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси системы координат Oxy имеют вид

$$\begin{aligned} 1\ddot{x} &= -0,5t^2 - 0,02\dot{x}^2 - 0,1\dot{x} + f(t)\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \\ 1\ddot{y} &= 0,6t^2 - 0,01\dot{y}^2 - 0,1\dot{y}. \end{aligned} \quad (3.15)$$



Р и с. 3.18 Расчётная схема

Решение задачи выполняется численным методом на ЭВМ с помощью программного комплекса Mathematica. Алгоритм решения показан на рисунках 3.19 - 3.20.

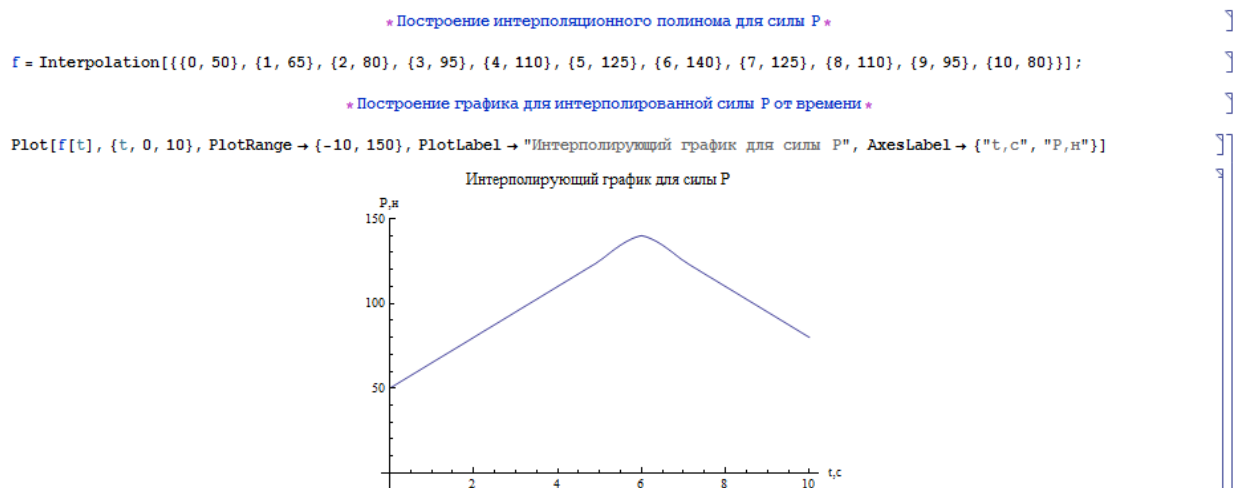
Сначала делается аппроксимация заданной таблично функции $f(t)$.

С помощью процедуры программы Mathematica **Interpolation[{array}]** вычисляется интерполирующая функция $f[t]$,

которая с одной стороны является гладкой, с другой стороны проходит через все указанные пользователем точки. Для визуального контроля необходимо построить график функции $f[t]$ с помощью процедуры `Plot[f[t], {t, 0, 10}]`, дополнительными опциями `PlotRange`, `PlotLabel`, `AxisLabel`, необходимо задать границы изменения функции на графике, название графика и координатных осей соответственно (рис. 3.19).

Дифференциальные уравнения движения материальной точки интегрируются с помощью численных методов заложенных в программу Mathematica. Применяется процедура `NDSolve`. Последовательность всех необходимых команд показана на рис. 3.20. Обратите внимание на то, что начальные условия могут задаваться как в описании уравнений, так и в функции `NDSolve`

Результаты вычислений представлены в виде графиков и таблиц на рисунках 3.21-3.26.



Р и с. 3.19. Аппроксимация табличной функции $P(t)$.

★ задание массы точки и временного промежутка, на котором исследуется движение ★

`T = 10; m = 1;`

★ Составление дифференциальных уравнений движения ★

`ox = {m * X''[t] == -0.5 * t^2 - 0.1 * X'[t] - 0.02 * (X'[t])^2 - f[t] * X'[t] / Sqrt[(X'[t])^2 + (Y'[t])^2]};`
`oy = {m * Y''[t] == 0.6 * t^2 - 0.1 * Y'[t] - 0.01 * (Y'[t])^2, X[0] == 1};`

★ Интегрирование системы уравнений численным методом с заданными граничными условиями ★

`Sol = NDSolve[{ox, oy, Y[0] == 1, X'[0] == 2, Y'[0] == 1}, {X, Y}, {t, 0, T}]`
`{X -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>], Y -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>]}`

Р и с. 3.20. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки.

★ Обозначение графиков полученных координат точки от времени ★

`g1 = Plot[X[t] /. Sol[[1]], {t, 0, T};`
`g2 = Plot[Y[t] /. Sol[[1]], {t, 0, T};`

★ Совместный вывод двух графиков на экран ★

`Show[g1, g2, PlotRange -> {-70, 250}, PlotLabel -> "Графики изменения координат со временем", AxesLabel -> {"t, с", "x, y, м"}]`

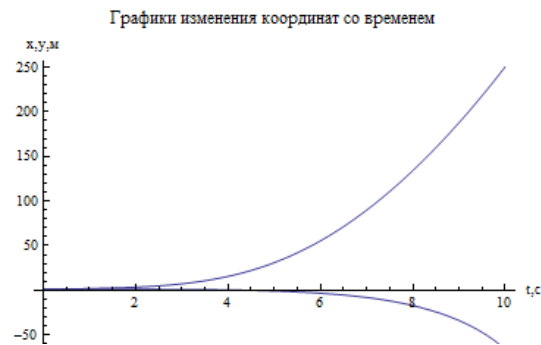


Рис. 3.21. Построение графиков изменения координат точки со временем

★ Формирование таблицы с координатами точки и соответствующих моментов времени ★

★ вывод таблицы координат точки на экран в форматированном виде ★

`In[12]:= A = Table[{t, Evaluate[X[t] /. Sol], Evaluate[Y[t] /. Sol]}, {t, 0, 10, 1}];`
`TableForm[A, TableHeadings -> {None, {"Время, с", "X(t)", "Y(t)"}}]`

`t[13]/TableForm=`

Время, с	X(t)	Y(t)
0	1.	1.
1	1.05577	1.99596
2	1.03046	3.55872
3	0.899126	7.30347
4	0.435392	15.5961
5	-0.769113	30.9848
6	-3.25529	55.4364
7	-7.98992	89.8392
8	-17.0688	134.133
9	-33.7532	187.827
10	-66.0615	250.421

Рис. 3.22. Построение табличной зависимости координат точки от времени

* Построение графика траектории точки *

```
ParametricPlot[Evaluate[{X[t], Y[t]} /. Sol], {t, 0, 10}, PlotLabel -> "График траектории точки",
AxesLabel -> {"x, м", "y, м"}, PlotRange -> {{-70, 10}, {0, 250}}
```

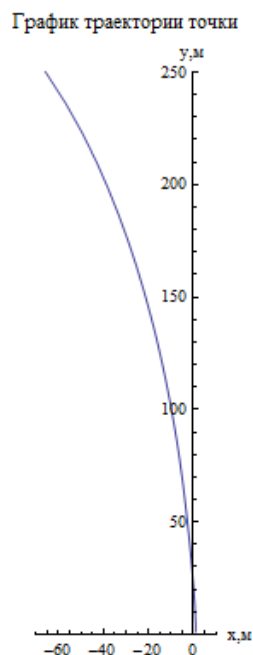


Рис. 3.23. Построение графика траектории точки

* формирование таблицы с координатами вектора скорости точки и соответствующих моментов времени *

* вывод таблицы координат скорости точки на экран в форматированном виде *

```
B = Table[{t, Evaluate[X'[t] /. Sol], Evaluate[Y'[t] /. Sol]}, {t, 0, 10, 1}];
TableForm[B, TableHeadings -> {None, {"Время, с", "Vx(t)", "Vy(t)"}}]
```

Время, с	Vx(t)	Vy(t)
0	2.	1.
1	-0.00807427	1.09048
2	-0.054873	2.30854
3	-0.244812	5.58485
4	-0.751266	11.4392
5	-1.75264	19.6754
6	-3.34514	29.3728
7	-6.50123	39.4128
8	-12.1473	49.0858
9	-22.3434	58.2166
10	-46.7431	66.9136

Рис. 3.24. Построение табличной зависимости координат вектора скорости точки от времени.

* Построение графика изменения координат вектора скорости точки со временем *

```
g3 = Plot[X'[t] /. Sol, {t, 0, T}]; g4 = Plot[Y'[t] /. Sol, {t, 0, T}];
```

```
Show[g3, g4, PlotLabel -> "Графики изменения координат скорости со временем", PlotRange -> {-50, 70},  
AxesLabel -> {"t, c", "x, y, м"}]
```

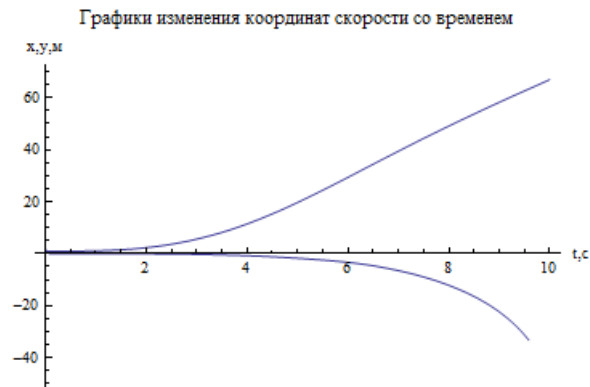


Рис. 3.25. Построение зависимости координат вектора скорости точки от времени.

* Построение графика годографа скорости точки *

```
ParametricPlot[Evaluate[{X'[t], Y'[t]} /. Sol], {t, 0, 10}, PlotLabel -> "График годографа скорости",  
AxesLabel -> {"t, c", "Vx, Vy, м/с"}, PlotRange -> {{-50, 10}, {0, 70}}]
```

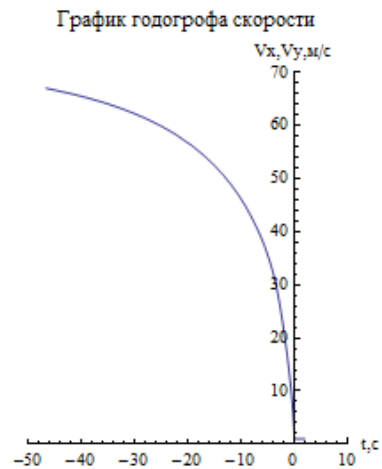


Рис. 3.26. Построение годографа скорости точки

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов. 18-е изд. М.: Высш. шк., 2008. – 416 с.
2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособ. для техн. вузов. / Под редакцией А. А. Яблонского. 16-е изд. М.: Интеграл – Пресс, 2008. – 382 с.
3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов/ 2-е изд., перераб. – М: Высш. шк., 2005. – 840 с.
4. Макаров Е.Г. Инженерные расчёты в MathCAD. Учебный курс./ СПб.: Питер, 2005. – 448 с.