

ВЛИЯНИЕ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ ПОТОКОМ ГАЗА

1. Течение жидкой пленки

1.1. Физическая постановка задачи

Атмосферные осадки формируют на поверхности летательного аппарата пленку жидкости, которая изменяет аэродинамические характеристики объекта. Будем рассматривать установившееся течение пленки жидкости на плоской пластине, под воздействием набегающего потока воздуха (рис.1). Пусть пластина расположена под углом α к горизонту. Тогда течение жидкости происходит за счет силы тяжести и трения на внешней поверхности пленки. Жидкость равномерно поступает в пленку из окружающей среды со скоростью V_k .

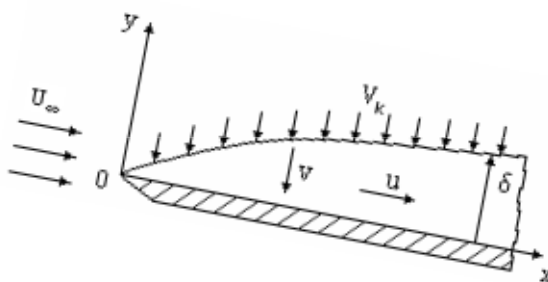


Рис.1. Схема течения пленки: u, v – компоненты вектора скорости, V_k – скорость вдува массы, U_∞ – скорость набегающего потока, δ – толщина пленки

1.2. Математическая постановка задачи о течении пленки

Запишем уравнения движения для стекающей пленки в проекции на декартовы координаты x и y

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial p_3}{\partial x} + \nu_3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_3}{\partial y} + \nu_3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \quad (3)$$

где p – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, g – ускорение свободного падения, индекс «3» - соответствует жидкости.

Граничные условия задачи будут иметь следующий вид

$$x = 0 , y = 0 , u = v = 0 , \quad (4)$$

$$x > 0 , y = 0 , u = 0 , v = 0 \quad y = \delta , v = -v_k , \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau}{\mu} , \quad (5)$$

где $\delta = \delta(x)$ - толщина пленки, $\tau = \tau(x)$ - трение на поверхности пленки.

1.3. Оценка слагаемых в уравнениях движения

Очевидно, что толщина пленки δ значительно меньше ее длины l , т.е. $l \gg \delta$. Выполним оценку порядка величин отдельных слагаемых, входящих в дифференциальные уравнения (1) – (3). Для чего введем безразмерные величины, учитывающие различные масштабы по координатам x и y :

$$\bar{x} = x/l , \quad \bar{y} = y/\delta , \quad \bar{u} = u/u_0 , \quad \bar{v} = v/v_0 , \quad \bar{p} = p/\rho u_0^2 , \quad (6)$$

где u_0, v_0 - масштабы скоростей по оси x и y , l – длина пластины.

Подставим (6) в уравнение неразрывности (3)

$$\frac{u_0}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{v_0}{\delta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 . \quad (7)$$

Чтобы сохранить оба слагаемых уравнения неразрывности необходимо приравнять их масштабы, откуда $v_0 = \frac{\delta}{l} u_0$ и, следовательно, поперечная скорость много меньше продольной $v_0 \ll u_0$. Анализ масштабов в уравнении (7) показывает, что слагаемое, содержащее градиент давления, на порядок больше остальных слагаемых. Кроме того, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Воспользуемся равенством давления в поперечном сечении для пленки жидкости и окружающего воздуха ($p_3 = p_1$). Найдем давлением столба возду-

ха $p_1 = \rho_1 g x \sin \alpha$, и тогда $\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p_3}{\partial x} = \rho_1 g \sin \alpha$, где индекс «1» - соответствует

воздуху. И уравнение движения перепишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v = g \sin \alpha \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) + \nu_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Объединяя (8) с уравнением неразрывности, получим консервативную форму уравнения движения

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = g \sin \alpha \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) + \nu_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (10)$$

1.4. Осреднение слагаемых в уравнении движения

Выполним осреднение слагаемых, входящих в уравнение (10), по толщине пленки. Для чего проинтегрируем (10) по y от 0 до δ , используя правило Лебница (производная от интеграла с переменным верхним пределом)

$$\frac{d}{dt} \int_0^\delta u dy = u(\delta) \frac{\partial \delta}{\partial t} + \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial t} dy, \quad (11)$$

Воспользуемся определением средней продольной скорости течения

$$\langle u \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u(x, y) dy, \quad (12)$$

Интеграл первого слагаемого уравнения (10) запишется в виде (полную производную можно заменить на частную)

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy - u^2(\delta) \frac{\partial \delta}{\partial x}. \quad (13)$$

1.5. Квадратичный закон распределения для продольной скорости

Поскольку толщина пленки достаточно мала, то вязкостные силы будут играть определяющую роль в формировании течения. В этом случае можно принять для продольной скорости квадратичный закон изменения продольной скорости в поперечном сечении пленки. Воспользуемся выражением для

скорости пленки постоянной толщины, стекающей по плоской вертикальной стенке, с учетом трения на поверхности

$$u(y) = \frac{g \sin \alpha (\rho_3 - \rho_1) \delta^2}{\mu_3} \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] + \frac{y\tau}{\mu_3}. \quad (14)$$

Средняя скорость течения

$$\langle u \rangle = \frac{g \sin \alpha (\rho_3 - \rho_1) \delta^2}{3\mu_3} + \frac{\delta\tau}{2\mu_3},$$

или

$$\frac{g \sin \alpha (\rho_3 - \rho_1) \delta^2}{\mu_3} = 3 \langle u \rangle - \frac{3\delta\tau}{2\mu_3}. \quad (15)$$

С учетом (15) распределение (14) можно переписать

$$u(y) = 3 \langle u \rangle \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] + \frac{\tau}{2\mu_3} \left(\frac{3y^2}{2\delta} - y \right), \quad (16)$$

Для рассматриваемой задачи средняя скорость течения $\langle u \rangle$, трение на поверхности пленки τ и толщина пленки δ являются функциями координаты x .

Используя (16) выпишем следующие выражения

$$u(\delta) = \frac{3 \langle u \rangle}{2} + \frac{\delta\tau}{4\mu_3}, \quad \frac{\partial u(\delta)}{\partial x} = \frac{3}{2} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\tau}{4\mu_3} \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad (17)$$

$$u^2(y) = 9 \langle u \rangle^2 \left[\frac{y^2}{\delta^2} - \frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{4\delta^4} \right] + \frac{3\tau \langle u \rangle}{\mu_3} \left(\frac{2y^3}{\delta^2} - \frac{3y^4}{4\delta^3} - \frac{y^2}{\delta} \right) + \frac{\tau^2}{4\mu_3^2} \left(\frac{3y^2}{2\delta} - y \right)^2, \quad (18)$$

$$u^2(\delta) = \frac{1}{4} \left(9 \langle u \rangle^2 + \frac{3\delta\tau \langle u \rangle}{\mu_3} + \frac{\delta^2 \tau^2}{4\mu_3^2} \right), \quad \int_0^\delta u^2 dy = \frac{6}{5} \langle u \rangle^2 \delta + \frac{\delta^2 \tau \langle u \rangle}{20\mu_3} + \frac{\delta^3 \tau^2}{120\mu_3^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3 \langle u \rangle \left(\frac{1}{\delta} - \frac{y}{\delta^2} \right) + \frac{\tau}{2\mu_3} \left(\frac{3y}{\delta} - 1 \right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3 \langle u \rangle}{\delta} - \frac{\tau}{2\mu_3}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \frac{\tau}{\mu_3}. \quad (20)$$

Интегралы от первого и второго слагаемого уравнения (10) запишутся в виде

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy - u^2(\delta) \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6}{5} \langle u \rangle^2 \delta + \frac{\tau}{20\mu_3} \langle u \rangle \delta^2 + \frac{\tau^2}{120\mu_3^2} \delta^3 \right) - \frac{1}{4} \left(9 \langle u \rangle^2 + \frac{3\delta\tau \langle u \rangle}{\mu_3} + \frac{\delta^2 \tau^2}{4\mu_3^2} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x}. \quad (21)$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial(uv)}{\partial y} dy = (uv)_0^\delta = -v_k \left(\frac{3 \langle u \rangle}{2} + \frac{\delta\tau}{4\mu_3} \right) \quad (22)$$

После осреднения слагаемых левая часть уравнения (10) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6}{5} \langle u \rangle^2 \delta + \frac{\tau}{20\mu_3} \langle u \rangle \delta^2 + \frac{\tau^2}{120\mu_3^2} \delta^3 \right) - \frac{1}{4} \left(9 \langle u \rangle^2 + \frac{3\delta\tau \langle u \rangle}{\mu_3} + \frac{\delta^2 \tau^2}{4\mu_3^2} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} - v_k \left(\frac{3 \langle u \rangle}{2} + \frac{\delta\tau}{4\mu_3} \right). \quad (23)$$

Продолжим интегрирование правой части уравнения (10)

$$\int_0^\delta g \sin \alpha \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) dy = g \sin \alpha \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \delta, \quad v_3 \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = v_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0^\delta = \frac{3\tau}{2\rho_3} - \frac{3v_3 \langle u \rangle}{\delta}. \quad (24)$$

Используя полученные выражения (21)-(24), перепишем уравнение движения в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6}{5} \langle u \rangle^2 \delta + \frac{\tau}{20\mu_3} \langle u \rangle \delta^2 + \frac{\tau^2}{120\mu_3^2} \delta^3 \right) - \frac{1}{4} \left(9 \langle u \rangle^2 + \frac{3\delta\tau \langle u \rangle}{\mu_3} + \frac{\delta^2 \tau^2}{4\mu_3^2} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} - v_k \left(\frac{3 \langle u \rangle}{2} + \frac{\delta\tau}{4\mu_3} \right) = g \sin \alpha \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) \delta + \frac{3\tau}{2\rho_3} - \frac{3v_3 \langle u \rangle}{\delta},$$

или

$$\frac{1}{5} \delta \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \left(12 \langle u \rangle + \frac{1}{4\mu_3} \tau \delta \right) - \frac{21}{20} \langle u \rangle^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{3}{80\mu_3^2} \tau^2 \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{13}{20\mu_3} \tau \delta \langle u \rangle \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{1}{20\mu_3} \delta^2 \frac{\partial \tau}{\partial x} \left(\langle u \rangle + \frac{1}{3\mu_3} \tau \delta \right) = \frac{v_k}{2} \left(3 \langle u \rangle + \frac{1}{2\mu_3} \tau \delta \right) + g \sin \alpha \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_3} \right) \delta + \frac{3}{2\rho_3} \tau - 3v_3 \frac{\langle u \rangle}{\delta}. \quad (25)$$

Запишем закон сохранения массы, для чего проинтегрируем уравнение неразрывности (3) по y от 0 до δ

$$-v_k = - \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u dy + (u)_{y=\delta} \frac{\partial \delta}{\partial x}. \quad (26)$$

тогда получим

$$v_k = \delta \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \langle u \rangle \frac{\partial \delta}{\partial x}. \quad (27)$$

Таким образом, имеем два уравнения (25) и (27), в которых содержится 3 неизвестные величины: δ , $\langle u \rangle$ и τ . Напряжение трения на межфазной поверхности можно определить из решения задачи Блазиуса с подвижной границей.

В этом случае система уравнений становится замкнутой и допускает численное решение.

2. Задача Блазиуса с подвижной стенкой

2.1. Физическая постановка задачи

Если на поверхности пластины имеется пленка жидкости, то задача о течении газа в пограничном слое будет отличаться от традиционной задачи Блазиуса тем, что вместо неподвижной стенки мы имеем подвижную пленку жидкости. Наличие пленки изменяет трение на межфазной поверхности. Определим влияние пленки на величину трения в пограничном слое. В общей постановке задача является сопряженной, включающей задачу о течении пленки (внутренняя задача) и задачу о пограничном слое набегающего воздуха (внешняя задача). Рассмотрим упрощенную модель, когда пленка имеет постоянную толщину и постоянную скорость. Схема течения показана на рис.2.

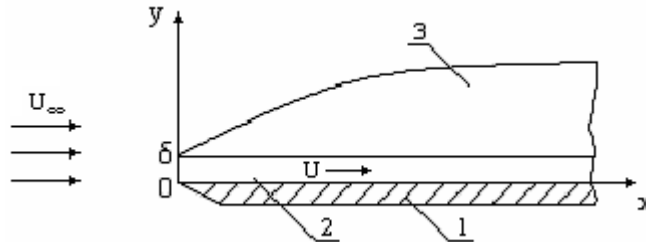


Рис.2. Схема течения. 1-пластина, 2-пленка, 3-пограничный слой, U_∞ – скорость набегающего потока, δ – толщина пленки, u – скорость жидкости

Будем рассматривать внешнюю задачу о течении газа в пограничном слое и внутреннюю задачу о течении пленки жидкости.

2.2. Течение жидкой пленки постоянной толщины

Запишем уравнение движения для пленки под воздействием постоянного трения на внешней поверхности и силы тяжести

$$0 = g \sin \alpha (\rho_3 - \rho_1) + \mu_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad y = 0, u = 0, y = \delta, \mu_3 \frac{\partial u}{\partial y} = \tau. \quad (28)$$

Решение дифференциального уравнения (28) имеет вид

$$u(y) = -\frac{g \sin \alpha}{2\mu_3}(\rho_3 - \rho_1)y^2 + \frac{1}{\mu_3}[\tau + g \sin \alpha(\rho_3 - \rho_1)\delta]y, \quad (29)$$

откуда

$$u(\delta) = -\frac{g \sin \alpha}{2\mu_3}(\rho_3 - \rho_1)\delta^2 + \frac{1}{\mu_3}[\tau + g \sin \alpha(\rho_3 - \rho_1)\delta]\delta, \quad \langle u \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u(y)dy, \quad (30)$$

где ρ – плотность, μ – динамическая вязкость, g – ускорение свободного падения, $\langle u \rangle$ – средняя скорость, индексы «1», «3» - соответствуют газу и жидкости, τ – трение, определяемое из решения внешней задачи.

Для того чтобы задача была однозначной, необходимо определить расход жидкости в пленке. Зададим массовый расход жидкости на единицу ширины пленки

$$G = \rho_3 \delta \langle u \rangle. \quad (31)$$

Запишем задачу о пограничном слое. Начало координат перенесем на поверхность пленки, и задача Блазиуса с подвижной границей будет иметь вид

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0, \quad \eta = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = \frac{2u(\delta)}{V_\infty}, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad \varphi' = 2, \quad (32)$$

где новая координата введена, как $\eta = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu_1 x}}$.

Для сращивания внешней и внутренней задачи на межфазной поверхности $\eta = 0$ ($y = 0$) задается скорость $u(\delta)$, полученная из внутренней задачи. Таким образом, общая постановка задачи включает в себя уравнения (29)-(32), которые решаются численно с использованием метода последовательных приближений.

Выпишем входные данные задачи: температура окружающей среды $t = 20^\circ C$, скорость набегающего потока воздуха $V_\infty = 10 м/с$, расход воды в пленке $G = 1,87 кг/с$, угол наклона пластины к горизонту $\alpha = \frac{\pi}{6}$. На первом шаге решается внутренняя задача (29)-(31). Напряжение трение на поверхности

пленки задается как среднее значение трения из задачи Блазиуса. Для неподвижной стенки распределение трения определяется формулой

$$\tau = 0,332 \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_1 V_\infty^3}{x}}. \quad (33)$$

Среднее значение трения определим для пластины длиной $x = 1 \text{ м}$. Формула (33) справедлива для ламинарного обтекания пластины, при числах Рейнольдса $Re = \frac{V_\infty \ell}{\nu_1} < 10^6$.

Численное решение задачи о течении жидкости в пленке дает следующие результаты: средняя скорость жидкости в пленке $\langle u \rangle = 1,8 \text{ м/с}$, толщина пленки $\delta = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, скорость жидкости на поверхности пленки $u(\delta) = 2,73 \text{ м/с}$. После чего, решается задача о пограничном слое (5) и определяется трение на межфазной поверхности

$$\tau = 0,25 \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_1 V_\infty^3}{x}} \varphi''(0). \quad (34)$$

С учетом найденного значения $\varphi''(0)$, формула (34) переписывается в виде

$$\tau = 0,29875 \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_1 V_\infty^3}{x}}. \quad (35)$$

Сравнение (33) и (35) показывает, что наличие подвижной границы снижает величину трения на 10%.

При отклонении пластины от горизонтального положения к силе трения на поверхности пленки добавляется сила тяжести, скорость в пленке возрастает, а трение уменьшается. Изменение трения удобно проследить для средней величины трения. На рис.3 показано изменение средней величины трения на поверхности пленки, как функция от угла наклона пластины.

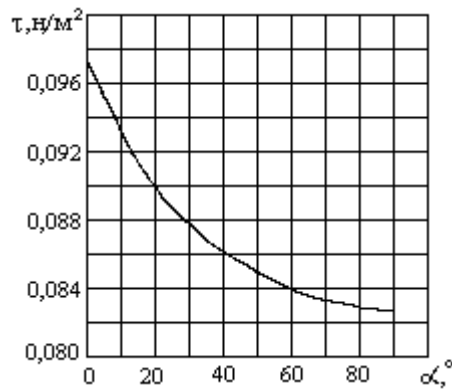


Рис.3. Изменение средней величины межфазного трения в зависимости от положения пластины ($x = 1 м$)

Из графика (рис.3) видно, что трение на поверхности пленки при $\alpha = 0^\circ$ (горизонтальное положение пластины) отличается от трения при $\alpha = 90^\circ$ (вертикальное положение) примерно на 15%. На рис.4 показано изменение средней величины трения для различных чисел Рейнольдса набегающего потока

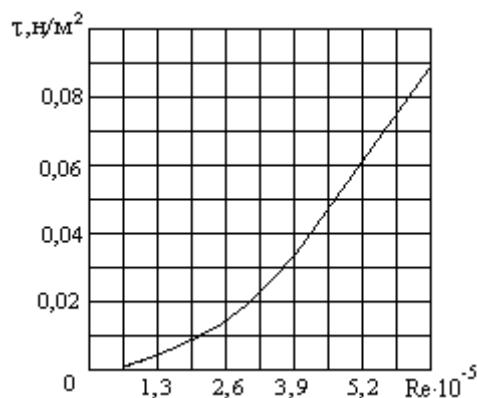


Рис.4. Зависимость средней величины межфазного трения на пластине

от чисел Рейнольдса ($Re \frac{V_\infty \ell}{\nu_1}, \alpha = \frac{\pi}{6}, \ell = 1 м$)

Числа Рейнольдса соответствуют скорости набегающего потока $V_\infty = 1; 2; 4; 6; 8; 10 м/с$. Данные (рис.4) показывают существенное возрастание величины напряжения трения.

На рис.5 показано распределение межфазного трения по длине пластины с пленкой и без пленки в логарифмической системе координат

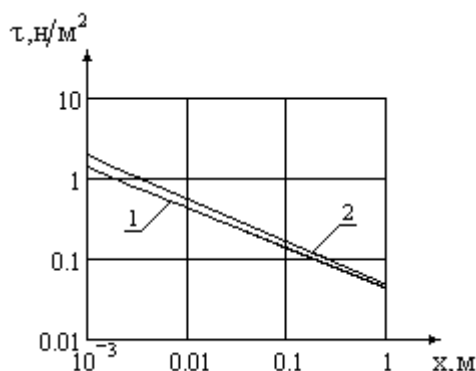


Рис.5. Распределение межфазного трения по длине пластины: 1- скорость жидкости на поверхности пленки $u(\delta) = 3\text{ м/с}$, 2-решение Блазиуса без пленки

Из графика (рис.5) видно, что минимальное различие для $x = 1\text{ м}$ составляет примерно 11,6%.

3. Сопряженная задача о взаимодействии пленки жидкости с набегающим потоком воздуха

Определим влияние пленки на величину трения в пограничном слое. В общей постановке задача является сопряженной, включающей задачу о течении пленки (внутренняя задача) и задачу о пограничном слое набегающего воздуха (внешняя задача). В настоящей работе для решения сопряженной задачи применяется метод последовательных приближений. Метод заключается в том, что внешняя и внутренняя задачи решаются друг от друга отдельно, но последовательно или итерационно.

На каждом новом приближении внутренняя задача решается с учетом трения, полученного из внешней задачи, решение которой, в свою очередь, учитывает скорость на межфазной поверхности, полученную в предыдущем приближении из внутренней задачи. Таким образом, итерационный процесс продолжается до тех пор, пока скорость и, как следствие, трение на межфазной поверхности будут меняться мало от итерации к итерации.

Для реального процесса задача о течении пленки является двумерной с переменной толщиной и переменной скоростью. Известно, что толщина пленки

имеет порядок $\delta_l \approx 10^{-3} \text{ м}^1$, и наложение пленки незначительно изменяет геометрию пластины. Поэтому, для внешней задачи можно пренебречь переменной толщиной пленки и рассмотреть приближенную модель, когда пленка имеет постоянную толщину.

Задача пограничного слоя. Переместим начало координат на поверхность пленки. Уравнения принимают вид

$$\begin{cases} u_3(x,y) \frac{\partial u_3(x,y)}{\partial x} + v_3(x,y) \frac{\partial u_3(x,y)}{\partial y} = g \sin(\alpha) + \nu_3 \frac{\partial^2 u_3(x,y)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_3(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v_3(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad (36)$$

где ν_3 кинематическая вязкость.

На границе раздела фаз зададим условия непротекания и равенства продольной скорости пограничного слоя и пленки:

$$y = 0, u_3 = u_{l3}(x), v_3 = 0. \quad (37)$$

На внешней границе пограничного слоя используем условия невозмущенного набегающего потока:

$$y = \delta(x), u_3 = u_\infty, v_3 = 0. \quad (38)$$

Уравнения пограничного слоя неприменимы в непосредственной близости от края пластинки. Поэтому $x=0$ задаем начальные профили скоростей и толщину пограничного слоя

$$x = 0, u_3(y) = u_n(y), v_3(y) = v_n(y), \delta_3 = \delta_n. \quad (39)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{\delta_3(x)}, \bar{\delta}_3(\bar{x}) = \frac{\delta_3(x)}{L}, \\ \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{u_3(x,y)}{u_\infty}, \bar{v}_3(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{v_3(x,y)}{u_\infty}, \bar{u}_{l3}(\bar{x}) = \frac{u_{l3}(x)}{u_\infty}, \end{aligned} \quad (40)$$

где L - длина пластины. Подставив (40) в уравнение движения (36) и упростив, получим

$$\begin{aligned} \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y}) \left[\frac{\partial \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{y} \bar{\delta}_3'(\bar{x})}{\bar{\delta}_3(\bar{x})} \frac{\partial \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right] + \frac{\bar{v}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{\delta}_3(\bar{x})} \frac{\partial \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = \\ = \frac{\sin(\alpha)}{Fr_3} + \frac{1}{Re_3 \bar{\delta}_3^2(\bar{x})} \frac{\partial^2 \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $Fr_3 = \frac{u_\infty^2}{g L}$, $Re_3 = \frac{u_\infty L}{\nu_3}$ соответственно число Фруда и число Рейнольдса

для пограничного слоя.

Уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{y} \bar{\delta}_3'(\bar{x})}{\bar{\delta}_3(\bar{x})} \frac{\partial \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\bar{\delta}_3(\bar{x})} \frac{\partial \bar{v}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (42)$$

где $\bar{\delta}_3'(\bar{x})$ означает первую производную функции $\bar{\delta}_3(\bar{x})$ по переменной \bar{x} .

Граничные условия (37), (38) и (39) перепишутся соответственно

$$\bar{y} = 0, \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{u}_{l3}(\bar{x}), \bar{v}_3 = 0, \quad (43)$$

$$\bar{y} = 1, \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y}) = 1, \quad (44)$$

$$\bar{x} = 0, \bar{u}_3(\bar{y}) = \bar{u}_n(\bar{y}), \bar{v}_3(\bar{y}) = \bar{v}_n(\bar{y}), \bar{\delta}_3 = \bar{\delta}_n. \quad (45)$$

Уравнения (41) и (42) содержат 3 неизвестные функции - $\bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{v}_3(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{\delta}_3(\bar{x})$. Для того, чтобы система уравнений была замкнутой, добавим к (41) и (42) еще одно уравнение, для чего проинтегрируем уравнение (41) по переменной \bar{y} от 0 до $\bar{\delta}_3(\bar{x})$ с учетом условия плавности смыкания продольной скорости пограничного слоя со скоростью набегающего потока:

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=1} = 0. \quad (46)$$

После интегрирования и необходимых преобразований получим уравнение для нахождения безразмерной толщины пограничного слоя

$$A \bar{\delta}_3'(\bar{x}) + B \bar{\delta}_3(\bar{x}) + \frac{C}{\bar{\delta}_3(\bar{x})} + D = 0, \quad (47)$$

где $A = \int_0^1 \bar{u}_3^2(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} - 1$, $B = 2 \left[\int_0^1 \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} d\bar{y} - \frac{\sin(\alpha)}{Fr^2} \right]$,

$$C = \frac{2}{Re_3} \frac{\partial \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}, \quad D = 2 \int_0^1 \bar{v}_3(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} d\bar{y}.$$

Задача для стекающей пленки жидкости. В приближении теории пограничного слоя $\delta_l(x) \ll L$, запишем уравнение движения в проекции на ось Ox (рис.6) и неразрывности для несжимаемой жидкости с постоянными теплофизическими характеристиками

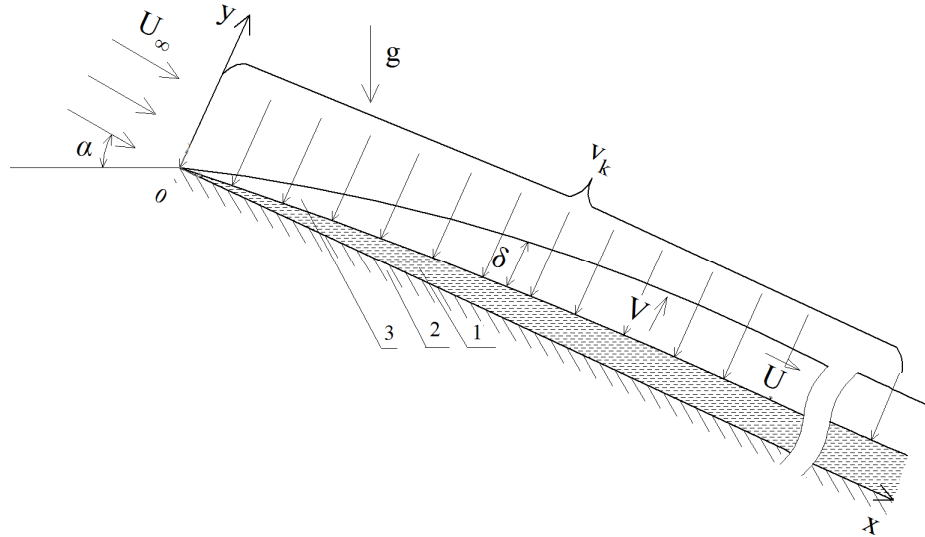


Рис.6. Схема течения. 1- пленка, 2 - пластина, 3 - пограничный слой, U_∞ - скорость набегающего потока, δ_3, U_3, V_3 - соответственно толщина, поперечная и продольная скорости пограничного слоя, g - ускорение свободного падения, α - угол наклона пластины к горизонту, v_k - скорость вдува массы в пленку, x и y - оси декартовой системы координат

$$\begin{cases} u_l(x, y) \frac{\partial u_l(x, y)}{\partial x} + v_l(x, y) \frac{\partial u_l(x, y)}{\partial y} = g \sin(\alpha) - \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial x} + \nu_l \frac{\partial^2 u_l(x, y)}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u_l(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_l(x, y)}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (48)$$

На стенке примем граничное условие непротекания

$y = 0, u_l(x, y) = 0, v_l(x, y) = 0$. На поверхности пленки при $y = \delta_l(x)$, задаем трение, полученное из решения задачи пограничного слоя $\tau_l = \mu_l \frac{\partial u_l(x, y)}{\partial y}$, а

также, так называемое, кинематическое граничное условие

$$v_l(x, y) = -v_k + \frac{d\delta_l(x)}{dt}. \quad (49)$$

Введем безразмерные координаты для пленки

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{\langle \delta \rangle}, \bar{\delta}_l(\bar{x}) = \frac{\delta_l(x)}{\langle \delta \rangle}, \bar{u}_l(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{u_l(x, y)}{\langle u \rangle}, \\ \bar{v}_l(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{v_l(x, y)}{v_k}, \bar{\tau}_l(\bar{x}) = \frac{\langle \delta \rangle}{\mu_l \langle u \rangle} \tau_l(x), \end{aligned} \quad (50)$$

где $\langle \delta \rangle$ и $\langle u \rangle$ соответственно средняя толщина и продольная скорость пленки на длине L пластины.

При гладкой поверхности и когда в газе действует только гидростатическое

давление имеем $\frac{\partial p_l}{\partial x} = \frac{\partial p_3}{\partial x} = g\rho_3 \sin(\alpha)$. Тогда с учетом (50) уравнение движе-

ния из (48) примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\bar{u}_l(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \bar{u}_l(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_l(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \bar{u}_l(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right) = \\ = \frac{v_l}{\langle \delta \rangle \langle u \rangle} \frac{\partial^2 \bar{u}_l(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}^2} + \frac{g \langle \delta \rangle \sin(\alpha)}{\langle u \rangle^2} \left(1 - \frac{\rho_3}{\rho_l} \right), \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \frac{\langle \delta \rangle}{L}$ - малый параметр. Учитывая только нулевое приближение, опре-

делим профиль продольной скорости из уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_l(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{Re_l}{Fr_l} \left(1 - \frac{\rho_3}{\rho_l} \right) \sin(\alpha), \quad (51)$$

и граничных условий

$$\bar{u}_l(\bar{x}, \bar{y})|_{\bar{y}=0} = 0 \text{ и } \left. \frac{\partial \bar{u}_l(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=\bar{\delta}(\bar{x})} = \bar{\tau}_l(\bar{x}), \quad (52)$$

где $Fr_l = \frac{\langle u \rangle^2}{g \langle \delta \rangle}$, $Re_l = \frac{\langle \delta \rangle \langle u \rangle}{v_l}$ соответственно число Фруда и число Рей-

нольдса для пленки жидкости.

Подставляя (50) в уравнение неразрывности из (48), получим выраже-
ние для скорости вдува в пленку

$$v_k = \frac{\langle u \rangle \langle \delta \rangle}{L} \quad (53)$$

Пусть сила тяжести уравновешивается вязким напряжением, в силу чего определим выражения для средней толщины и продольной скорости пленки

$$\langle \delta \rangle = \sqrt[3]{\frac{v_k L v_l}{g \sin(\alpha) \left(1 - \frac{\rho_3}{\rho_l}\right)}}, \quad \langle u \rangle = \sqrt[3]{\frac{v_k^2 L^2 g \sin(\alpha) \left(1 - \frac{\rho_3}{\rho_l}\right)}{v_l}}. \quad (54)$$

Запишем интеграл уравнения (51)

$$\bar{u}_l(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\delta}_l'^2(\bar{x}) \left(\frac{\bar{y}}{\bar{\delta}_l(\bar{x})} - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{y}}{\bar{\delta}_l(\bar{x})} \right)^2 \right) + \bar{\tau}_l(\bar{x}) \bar{y}. \quad (55)$$

Определим профиль поперечной скорости, проинтегрировав уравнение неразрывности из (48) от $\bar{y} = 0$ до $\bar{y} = \bar{\delta}_l(\bar{x})$, с учетом (50) и (55)

$$\bar{v}_l(\bar{x}, \bar{y}) = -(\bar{\tau}_l'(\bar{x}) + \bar{\delta}_l'(\bar{x})) \frac{\bar{y}^2}{2}. \quad (56)$$

С помощью выражений (55) и (56) найдем компоненты скорости на межфазной поверхности

$$\bar{u}_l(\bar{\delta}) = \frac{\bar{\delta}_l'^2(\bar{x})}{2} + \bar{\tau}_l(\bar{x}) \bar{\delta}_l(\bar{x}), \quad \bar{v}_l(\bar{\delta}) = -(\bar{\tau}_l'(\bar{x}) + \bar{\delta}_l'(\bar{x})) \frac{\bar{\delta}_l(\bar{x})^2}{2} \quad (57)$$

Уравнение для определения $\bar{\delta}_l(\bar{x})$ получим из (50), (53), (57) и кинематического граничного условия

$$\bar{\delta}_l'(\bar{x}) \bar{\delta}_l^2(\bar{x}) + \bar{\delta}_l'(\bar{x}) \bar{\delta}_l(\bar{x}) \bar{\tau}_l(\bar{x}) + \frac{\bar{\tau}_l'(\bar{x}) \bar{\delta}_l^2(\bar{x})}{2} = 1 \quad (58)$$

Для однозначного решения уравнения (58) доопределим его на краю пластины граничным условием $\bar{\delta}(0) = 0$. В силу того, что для внешней и внутренней задач использовались разные безразмерные переменные (40) и (50), то для сопряжения задачи пограничного слоя с задачей для пленки установим зависимость

$$\bar{\tau}_l(\bar{x}) = \frac{\langle \delta \rangle U_\infty \mu_3}{\langle u \rangle L \mu_l} \bar{\tau}_3(\bar{x}). \quad (59)$$

Численное решение задачи пограничного слоя и пленки. Благодаря введенным формулой (40) безразмерным переменным расчетная область для решения в ней задачи пограничного слоя представляет собой прямоугольную область (рис.7).

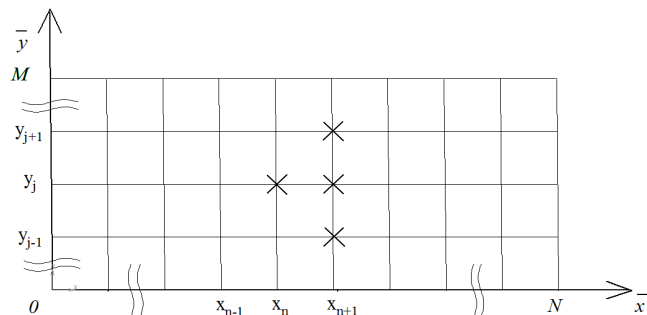


Рис. 7. Расчетная область для задачи пограничного слоя. \bar{x} и \bar{y} - безразмерные координаты области, N и M - число узлов расчетной области по координате \bar{x} и \bar{y} соответственно, индекс n и j определяют порядковый номер узла по координате \bar{x} и \bar{y} соответственно, крестиками отмечен шаблон конечно-разностной схемы.

Итерационный метод решения конечно-разностной задачи системы дифференциальных уравнений (41), (42), и (47) неявной схемой с помощью метода запаздывающих коэффициентов и шаблона (рис.7), можно представить в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\binom{k}{j} \bar{u}_j^{n+1}}{\bar{u}_j^{n+1}} + \frac{\binom{k+1}{j} \bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{h_x} + \frac{1}{\bar{\delta}^{n+1} \binom{k}{j}} \left(\bar{v}_j^{n+1} - \bar{y}_j \frac{\binom{k}{j} \bar{u}_j^{n+1}}{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n} \right) \frac{\binom{k+1}{j+1} \bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{2 h_y} = \\
& = \frac{\sin(\alpha)}{Fr^2} + \frac{1}{Re_3} \frac{1}{\left(\bar{\delta}^{n+1} \binom{k}{j} \right)^2} \frac{\binom{k+1}{j+1} \bar{u}_{j+1}^{n+1} - 2 \bar{u}_j^{n+1} + \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{h_y^2}, j = \overline{1, M-1}, \\
& \frac{1}{2} \left(\frac{\binom{k+1}{j-1} \bar{u}_{j-1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^n}{h_x} + \frac{\binom{k+1}{j} \bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{h_x} \right) - \frac{\bar{y}_{j-1} + \bar{y}_j}{2} \frac{\binom{k}{j} \bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}{\bar{\delta}^{n+1} h_x} \frac{\binom{k+1}{j} \bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{h_y} + \\
& \quad + \frac{1}{\bar{\delta}^{n+1} \binom{k}{j}} \frac{\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_{j-1}^{n+1}}{h_y} = 0, j = \overline{1, M}, \\
& A^{n+1} \frac{\binom{k+1}{j} \bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}{h_x} + B^{n+1} \frac{\binom{k+1}{j} \bar{\delta}^{n+1}}{\bar{\delta}^{n+1}} + \frac{C^{n+1}}{\binom{k+1}{j} \bar{\delta}^{n+1}} + D^{n+1} = 0,
\end{aligned} \right. \quad (60)$$

где k в скобках над переменной обозначает номер итерации, $h_x = \frac{1}{N}$, $h_y = \frac{1}{M}$.

В дальнейшем скобки с указанием на зависимость функции от переменных опущены.

Отметим, что задача решается слоями. Под слоем подразумевается множество узлов расчетной области, стоящих на пересечении спузлом. Начиная с $n = 1$ слоя итерационный процесс продолжается до тех пор, пока уравнения не обратятся в тождество, далее тоже самое повторяется для $n = 2$ слоя и т.д. На $n + 1$ слое для (60) граничными условиями в соответствии с (43) и (44) будут

$$\bar{u}_0^{n+1} = \bar{u}_{13}^{n+1}, \bar{v}_0^{n+1} = 0, \bar{u}_M^{n+1} = 1, k = 0, 1, \dots, \quad (61)$$

а начальное приближение примет вид

$$\bar{u}_j^{(0)} = \bar{u}_j^n, \bar{v}_j^{n+1} = \bar{v}_j^n, j = \overline{0, M}, \bar{\delta}^{n+1} = \bar{\delta}^n. \quad (62)$$

После того, как система уравнений (60) решена для всех n слоев с помощью формулы

$$\bar{\tau}_3 = \frac{1}{\delta_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} \quad (63)$$

находится безразмерное трение $\bar{\tau}_3$ на поверхности пленки. С помощью (59) и (63) находим $\bar{\tau}_1$ для решения (59). Далее решение уравнения (59) подставляется в (55), и таким образом находится безразмерная скорость \bar{u}_1 на поверхности пленки. Если скорости u_1 и u_3 на поверхности пленки отличаются друг от друга, то задача пограничного слоя (60) – (62) и пленки (55), (58), (59) решаются в новой итерации.

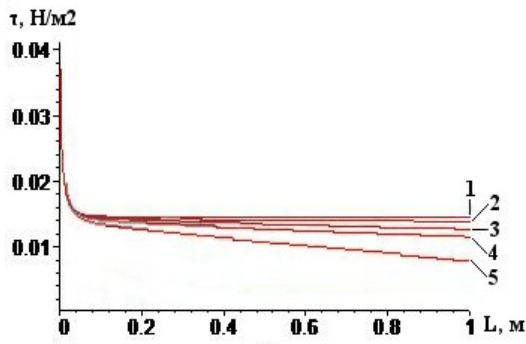
Решение задачи ламинарного пограничного слоя на плоской пластине (задачи Блазиуса) ограничено числами Рейнольдса $Re_3 < 5 \cdot 10^5 \div 10^6$, а ламинарное течение пленки жидкости не превышает значения

$$\overline{Re}_1 = \frac{\delta_1(L) \langle u \rangle_L}{\nu_1} < 400, \text{ где } \overline{Re}_1 \text{ и } \langle u \rangle_L = \frac{1}{\delta_1(L)} \int_0^{\delta_1(L)} u_1(L, y) dy \text{ -соответственно}$$

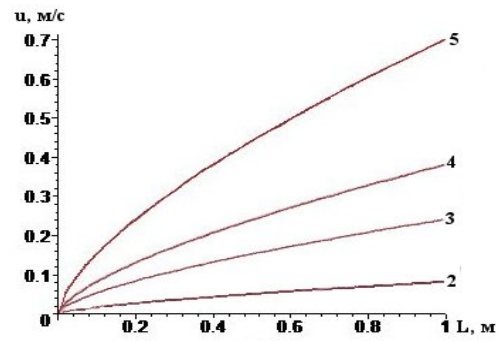
число Рейнольдса и средняя продольная скорость для пленки жидкости на длине L [2], [3]. Поэтому предложенная математическая модель может быть использована при указанных ограничениях.

Пример. В качестве примера приведем решение задачи для водяной пленки и набегающего потока воздуха. Выпишем входные данные задачи: температура окружающей среды $t = 20^\circ C$, скорость набегающего потока $u_\infty = 1 \text{ м/с}$, длина пластины $L = 1 \text{ м}$.

На рис. 8 и рис. 9 представлены графики распределения трения и скорости на границе раздела пленки и пограничного слоя по длине пластины в зависимости от скорости вдува массы ν_k при разных α .

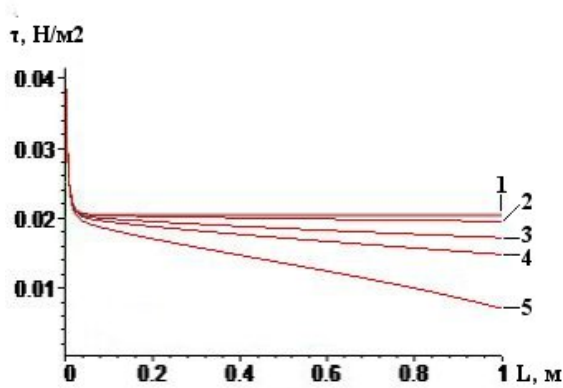


а

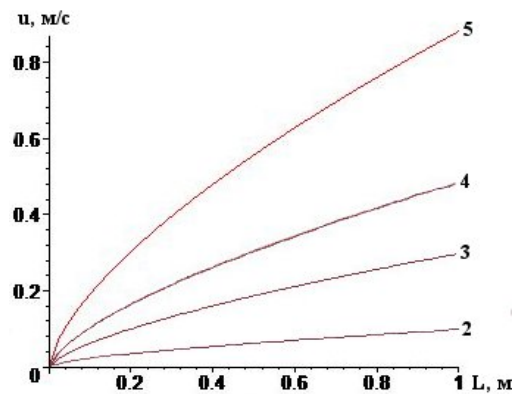


б

Рис.8. Распределение на границе раздела пленки и пограничного слоя при $\alpha = 30^\circ$ трения - а и скорости - б. На графиках 1 соответствует $v_k = 0$ м/с, 2 - $v_k = 10^{-5}$ м/с, 3 - $v_k = 5 \cdot 10^{-5}$ м/с, 4 - $v_k = 10^{-4}$ м/с, 5 - $v_k = 2,5 \cdot 10^{-4}$ м/с



а



б

Рис.9. Распределение на границе раздела пленки и пограничного слоя при $\alpha = 85^\circ$ трения - а и скорости - б.

Из рисунков видно, что с увеличением угла наклона пластины от горизонтального положения к силе трения на поверхности плёнки добавляется сила тяжести, скорость в плёнке возрастает, а трение уменьшается.

В таблице представлены средние значения межфазного трения и числа Рейнольдса для пленки

Таблица

| α, \circ $v_k, \text{ м\cс}$ | 5 | 30 | 60 | 85 | \overline{Re}_l |
|--|---------|---------|---------|---------|-------------------|
| 0 | 0.00671 | 0.01486 | 0.01941 | 0.02079 | |
| 10^{-5} | 0.00663 | 0.01448 | 0.01882 | 0.02013 | 9.9 |
| $5 \cdot 10^{-5}$ | 0.00645 | 0.01372 | 0.01761 | 0.01877 | 49.5 |
| 10^{-4} | 0.00627 | 0.01298 | 0.01643 | 0.01743 | 99.01 |
| $2.5 \cdot 10^{-4}$ | 0,00580 | 0.01100 | 0.01318 | 0.01369 | 247.55 |

Из таблицы видно, что величина трения уменьшается с увеличением угла наклона пластины и скорости вдува. Максимальное отличие величины трения с пленкой и без пленки достигает 34 %. Для пленки жидкости число Рейнольдса \overline{Re}_l увеличивается от края пластины и не зависит от угла ее наклона, а для пограничного слоя $Re_3 = 1,49 \cdot 10^5$.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что плёнка жидкости на поверхности тела уменьшает сопротивление трения. Для неудобообтекаемых тел вклад трения в общее сопротивление тела невелик. Напротив, для удобообтекаемых тел, трение играет определяющую роль. Следовательно, наличие атмосферной влаги на поверхности тела стоит учитывать при расчёте аэродинамических характеристик удобообтекаемых тел.